

## محاكاة التوزيع الحراري المستقر في أنود خلية مصهر الألومنيوم

\* سلطانة صالح ابخاطره عبديره

\* ربيعة بدر عمر أوحيدة

**المستخلص:** يتناول البحث إجراء محاكاة لدراسة التوزيع الحراري المستقر بداخل أنود مصهر الألومنيوم بأبعاده الحقيقية أي ثلاثة أبعاد، وذلك بحل معادلة الحرارة تقريباً باستخدام طريقة الفروق المحددة (Finite element method) والطرق التكرارية، وللتأكد من صحة ودقة نتائج المحاكاة قورنت مع النتائج المتحصل عليها من برنامج COMSOL® Multiphysic الذي يأخذ جميع الخصائص الفيزيائية للأنود الكربوني في الاعتبار وكانت النتائج متقاربة بشكل جيد.

**الكلمات المفتاحية:** أنود مصهر الألومنيوم، معادلة الحرارة، طريقة الفروق المحددة، طريقة الاسترخاء الزائد المتتالي.

**المقدمة:**

تعد صناعة الألومنيوم من الصناعات الأساسية في عصرنا الراهن نظراً لما يتمتع به هذا العنصر من مزايا مثل خفة الوزن والمتانة وسهولة التشكيل والتوصيل الجيد للكهرباء ومقاومة الصدأ، لذلك يدخل في العديد من الصناعات مثل صناعة المواد الكهربائية وبناء هياكل ومحركات الطائرات والسيارات، ويعتبر معدن الألومنيوم من المعادن حديثة الاستعمال نسبياً على الرغم من وفرته في الطبيعة على شكل مادة خام "البوكسيت"، ولقد مرت عملية اكتشاف الألومنيوم واستخلاصه بمراحل عديدة شهدت الكثير من التطورات الفنية والاقتصادية حيث أصبحت صناعة الألومنيوم حالياً من أهم الصناعات المعدنية، وبالنظر إلى أن الصناعة الأولية للألومنيوم تحتاج إلى رأس مال كبير وتستهلك طاقة هائلة فالدول المتوفرة فيها هذه الإمكانيات تحظى فيها صناعة الألومنيوم بقسط وافر من اهتمامها سعياً منها إلى توسيع القاعدة الإنتاجية وتنويع مصادر الدخل، ولكون خلايا اختزال الألومنيوم تستهلك طاقة كهربائية هائلة تفقد على شكل حرارة داخل الخلية ومحيطها الخارجي، لذلك فدراسة التوزيع الحراري المستقر داخل الأنود (الذي يمثل كيف تتغير درجة الحرارة مع الموضع في النظام) وهو أمر في غاية الأهمية. [1,2]

**الهدف من البحث:**

تهدف هذه الدراسة لحساب درجات الحرارة عند كل نقطة من النقاط الداخلية للأنود باستخدام الحاسوب والتي لا يمكن الوصول إليها واختبارها عملياً، والمحاكاة بالحاسوب (Computer Simulation) من الأدوات الفعالة جداً في البحث العلمي في عصرنا الراهن وذلك للأسباب التالية:

\* قسم الفيزياء-كلية الآداب والعلوم المرج - جامعة بنغازي.

\* قسم الفيزياء-كلية الآداب والعلوم المرج - جامعة بنغازي.

1. تتميز المحاكاة بالحاسوب عن إقامة التجربة الحقيقية من حيث استخلاص النتائج حيث تعطي تفاصيل دقيقة وغزيرة جداً عن جميع الكميات الفيزيائية المرغوب فيها والتي لا يمكن للتجربة العملية الحقيقية كشفها.
2. تكاليف مادية منخفضة جداً (لا تتعدى زمن التشغيل) لا تقارن وبأي شكل من الأشكال مع تكاليف إجراء التجارب العملية التي تحتاج الكثير من الوقت والتكاليف.
3. إمكانية استرجاع ومتابعة هذه التجربة على الحاسوب وبظروف مختلفة ومتغيرات متعددة حسب الطلب والتي لا يمكن تحقيقها بسهولة في ظروف التجارب الحقيقية.
4. المحاكاة آمنة تماماً فهي عبارة عن تجربة في الواقع الافتراضي ولا يترتب عليها أي مخاطر صحية أو بيئية.

#### تطبيق معادلة الحرارة على أنود خلية مصهر الألومنيوم

أثناء عمل الخلية لاستخلاص الألومنيوم فإن التيار الكهربائي المار في القطب الموجب سيقاوم ونتيجة للمقاومة الكهربائية تتولد حرارة على الأنود، ولتحديد توزيع درجات الحرارة على القطب الموجب استخدمت معادلة الحرارة مع افتراض أن معامل التوصيل الحراري (k) (thermal conductivity) ثابت ولا يعتمد على الموضع أو درجة الحرارة.

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{-----(1)}$$

حيث: T: درجة الحرارة ،  $\alpha$  : معامل الانتشار الحراري ، t : الزمن ،  $\dot{q}$  : المعدل الذي تتولد به الحرارة داخلياً لكل وحدة حجم.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{و استخدمت الإحداثيات الكارتيزية x,y,z لكون الأنود على شكل متوازي مستطيلات.}$$

بعد فترة زمنية تسمى بفترة العبور نصل إلى توزيع حراري مستقر أي أن  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$  وذلك يعني عدم تغير درجة

الحرارة عند أي نقطة في الأنود مع مرور الزمن أي أن كمية الحرارة المتولدة تساوي كمية الحرارة المفقودة بالحمل عند

سطح الأنود ، فتصبح المعادلة (1) على الصيغة الآتية :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad \text{-----} \quad (2)$$

ولسريان حراري مستقر بدون أي توليد أو إطلاق طاقة حرارية داخل الجسم (غياب المصادر الحرارية الداخلية)

يمكن صياغة المعادلة على الصورة الآتية:

$$\frac{\partial T}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial y^2} + \frac{\partial T}{\partial z^2} = 0 \quad \text{-----} \quad (3)$$

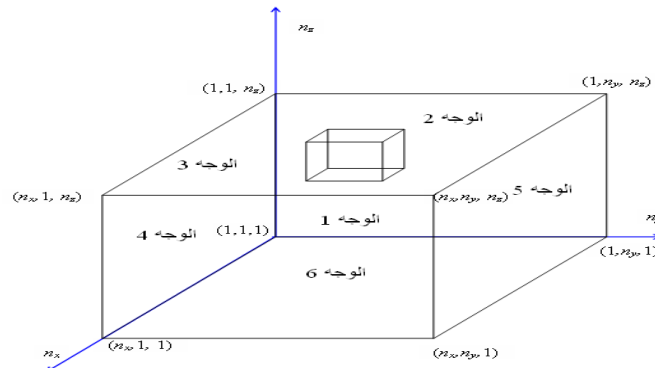
وهذه المعادلة يمكن تطبيقها على جميع أجزاء الأنود والتي محلها نتحصل على قيم درجات الحرارة  $T(x, y, z)$  في النقطة  $(X, Y, Z)$  مع مراعاة الشروط الحدية (boundary conditions) الموضوعة على قيم درجات الحرارة عند الحدود. [3]

لإيجاد حل هذه المعادلة بحيث تتحقق عند كل نقطة داخل النظام نلجأ إلى الحل التقريبي بدلاً من الحل التحليلي الذي يتطلب مجهوداً كبيراً في بعض الأحيان، ولحل هذه المعادلة تقريبياً استخدمت طريقة الفروق المحددة لتحويل المعادلة التفاضلية (3) إلى مجموعة من المعادلات الجبرية الخطية الآتية ومن ثم استخدام طريقة الاسترخاء الزائد المتتالي (SOR) (Successive over relaxation method) لحل المعادلات الجبرية الخطية الآتية الناتجة. [4, 5]

دراسة النظام في ثلاثة أبعاد " أبعاده الحقيقية "

تم في هذا البحث دراسة توزيع درجات الحرارة في أنود خلية مصهر الألومنيوم بأبعاده الثلاثة الحقيقية " الأبعاد

الكارتيزية " كما في الشكل (1).



الشكل (1) الأنود في الأبعاد الثلاثية.

## الشروط الحدية المطبقة على الأنود بأبعاده الحقيقية: Boundary conditions

ينتقل التيار الكهربائي من العقب عبر المناطق الحدية " بين العقب والكربون " ومنه إلى المصهور الالكتروليتي عبر الحد السفلي للأنود (الوجه 6) وبعده إلى المهبط وافترض هنا أن التيار الكهربائي يعبر بشكل عمودي المناطق الحدودية ونتيجة لمرور التيار الكهربائي في الأنود تتولد حرارة نتيجة للمقاومة الكهربائية وبعد فترة زمنية نصل إلى توزيع حراري مستقر وتكون درجة الحرارة على الأوجه كالتالي :

- درجة الحرارة على الأوجه الخمسة (من الوجه 1 إلى الوجه 5) هي درجة حرارة الغرفة لكون هذا النظام موجود في محيط لا نهائي درجة حرارته هي درجة حرارة الغرفة.

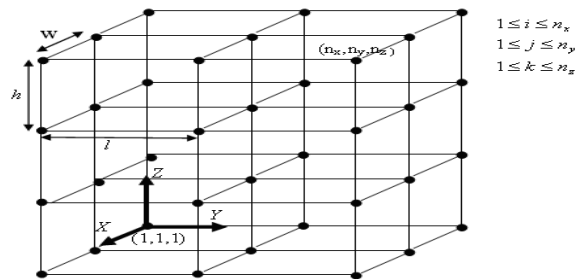
- درجة حرارة العقب  $350c^{\circ}$ .

- درجة حرارة (الوجه 6) السطح السفلي  $960c^{\circ}$  وهي درجة الحرارة اللازمة للتشغيل .

- درجة حرارة المناطق البينية " بين العقب والكربون " هي نفسها درجة حرارة العقب.[4]

## التمثيل الحسابي:

نستخدم المعادلة (3) لدراسة توزيع الحرارة بالإحداثيات الكارتيزية الثلاثة، ونتيجة للشروط الحدية التي يخضع لها النظام تم التعبير عن المشتقات الجزئية في المعادلة (3) بصيغة الفروق المحددة حيث قسم الأنود إلى شبكة مكونة من مجموعة متوازيات المستطيلات طول كل منها  $l$  وعرضها  $w$  وارتفاعها  $h$  ، كما هو مبين في الشكل(2) وتكون أركان متوازيات المستطيلات هي النقاط المراد إيجاد قيمة درجة الحرارة  $T(i, j, k)$  عندها. [4,6]



الشكل (2) يبين تقسيم النظام إلى شبكة ثلاثية الأبعاد.

حيث:  $i$  مؤشر لعدد النقاط في الاتجاه  $X$  ،  $j$  مؤشر لعدد النقاط في الاتجاه  $Y$  و  $k$  مؤشر لعدد النقاط في الاتجاه  $Z$ .

$n_x$ : عدد النقاط في الاتجاه  $X$ ،  $n_y$ : عدد النقاط في الاتجاه  $Y$  و  $n_z$ : عدد النقاط في الاتجاه  $Z$ .

تكتب صيغ الفروق المحددة في ثلاثة أبعاد كالاتي :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T(i+1, j, k) - 2T(i, j, k) + T(i-1, j, k)}{w^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T(i, j+1, k) - 2T(i, j, k) + T(i, j-1, k)}{l^2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{T(i, j, k+1) - 2T(i, j, k) + T(i, j, k-1)}{h^2} \quad (6)$$

وبالتعويض عن صيغ الفروق في المعادلة (3) واختيار شبكة مكعبة ( $h = w = l$ ) نتحصل على حل تقريبي عند

نقاط الشبكة  $(i, j, k)$  المعرفة بواسطة تقاطعات الخطوط وهو :

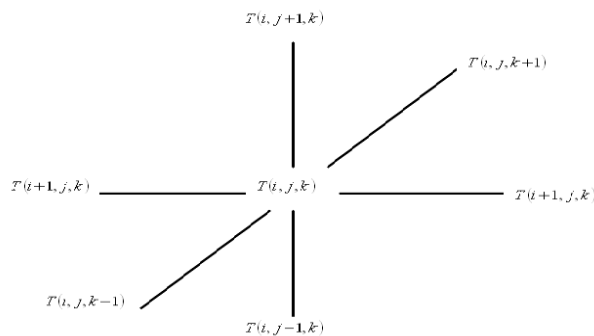
$$T(i, j, k) = \frac{1}{6} [T(i+1, j, k) + T(i-1, j, k) + T(i, j+1, k) + T(i, j-1, k) + T(i, j, k+1) + T(i, j, k-1)] \quad (7)$$

وتعرف هذه الصيغة بصيغة الفروق لسبع نقاط حيث أن قيمة الدالة  $T(i, j, k)$  تعتمد على قيم الدوال الستة المجاورة

لها

$$T(i+1, j, k), T(i-1, j, k), T(i, j+1, k), T(i, j-1, k), T(i, j, k+1), T(i, j, k-1),$$

كما هو مبين في الشكل (3)



شكل (3) يبين طريقة الفروق لسبع نقاط.

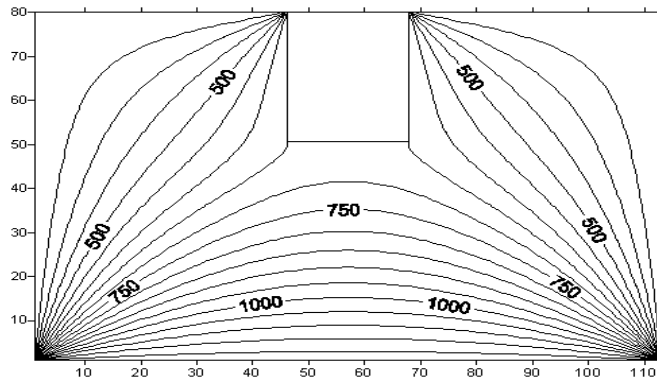
وبذلك تم تحويل المعادلة التفاضلية (3) إلى مجموعة من المعادلات الجبرية الخطية الآتية (7) والتي تحقق شرط التقارب

لذلك يمكننا استخدام طريقة الاسترخاء الزائد المتتالي (SOR) التقريبية لحل هذه المعادلات الآتية. [9,8,7]

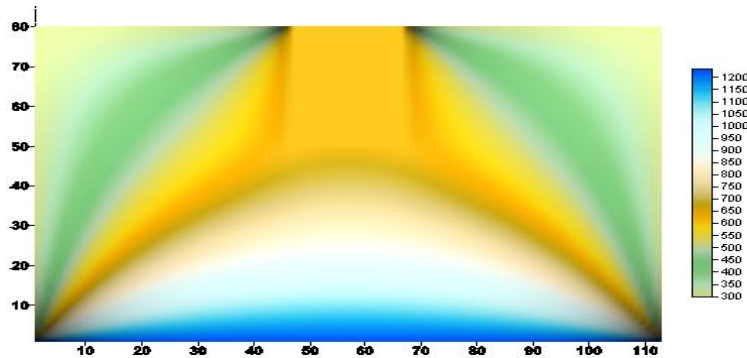
### النتائج:

تم في هذه المحاكاة افتراض أن عرض الأنود 76.2 سم وطوله 101.2 سم وارتفاعه 53.34 سم، أما العقب فكان عرضه 21 سم وطوله 23 سم وارتفاعه 21 سم، كما تم افتراض أن درجة حرارة الغرفة  $22^{\circ}C$  وعدد نقاط الشبكة على المحور  $x$  كان 153 نقطة و على المحور  $y$  كان 113 نقطة وعلى محور  $z$  كان 80 نقطة، ومن خلال المحاكاة تحصلنا على قيم درجات الحرارة في أنود خلية مصهر الألومنيوم في حالة وضع التشغيل المستقر عند كل نقطة من نقاط الأنود والتي يصعب الوصول إليها عملياً، ثم عرض النتائج المتحصل عليها من المحاكاة على شكل شرائح طولية متعامدة على طول محور  $x$  وعرضية متعامدة على طول محور  $z$  باستخدام برنامج (Surfer 8) الإصدار الثامن.

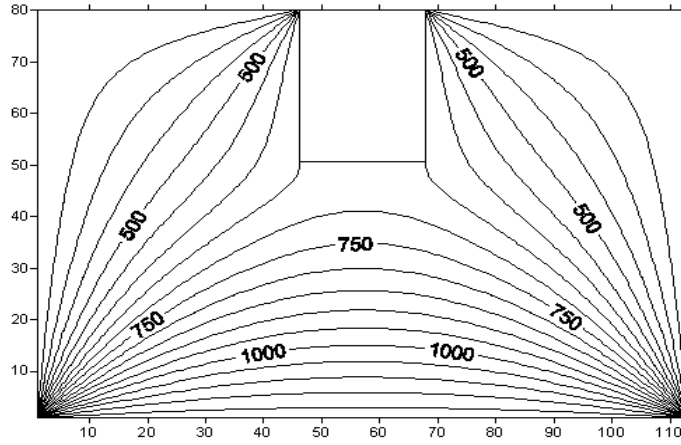
أولاً- رسم الشرائح في اتجاه  $x$ : تم رسم بعض الشرائح في اتجاه  $x$  كما هو مبين في الأشكال الآتية:



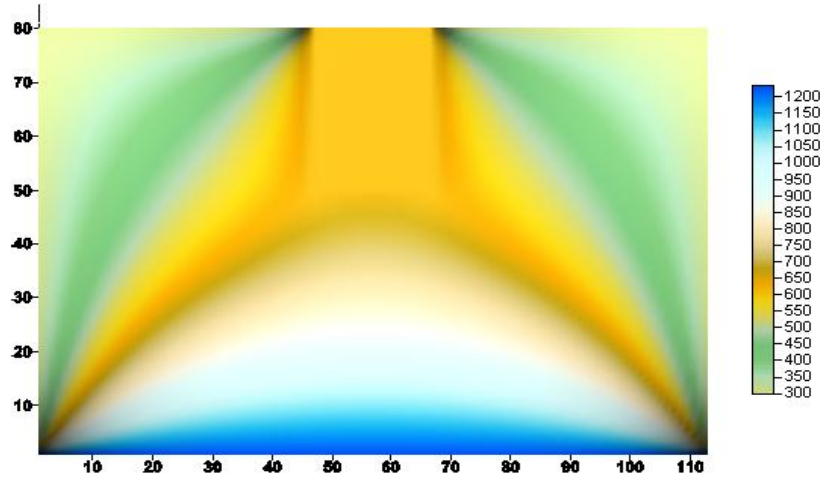
شكل (4) يبين توزيع خطوط تساوي درجة الحرارة للشريحة المركزية أي عند  $(i=77)$ .



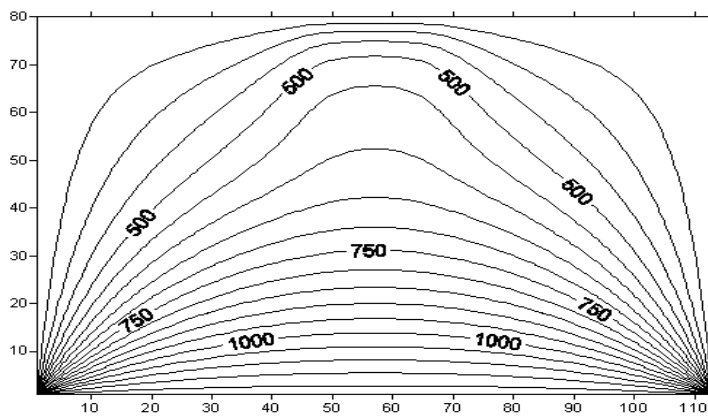
شكل (5) يمثل انحدار درجات الحرارة خلال السطح للشريحة المركزية أي عند  $(i=77)$ .



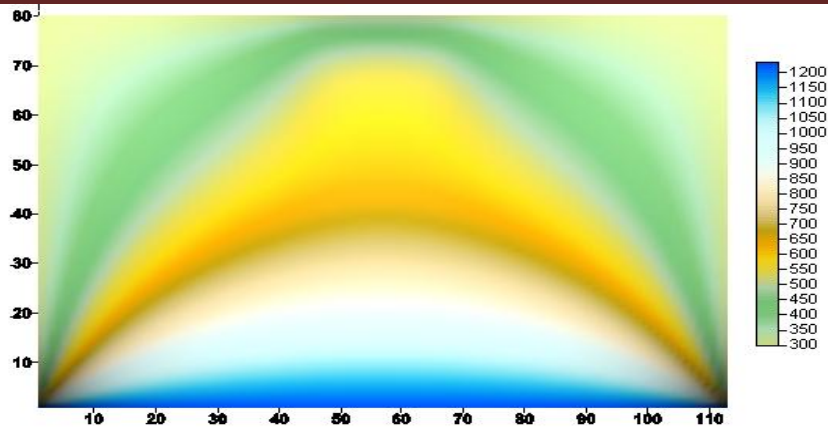
شكل (6) يبين توزيع خطوط تساوي درجة الحرارة لشريحة تحتوي على العقب عند  $(i=68)$ .



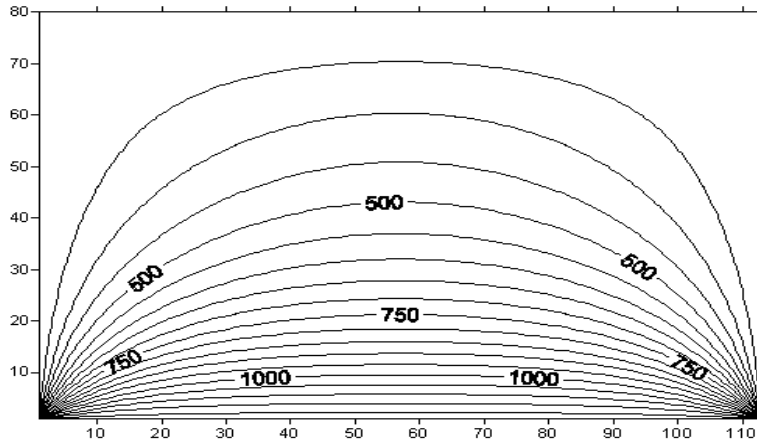
شكل (7) يمثل انحدار درجات الحرارة خلال السطح لشريحة تحتوي على العقب عند  $(i=68)$ .



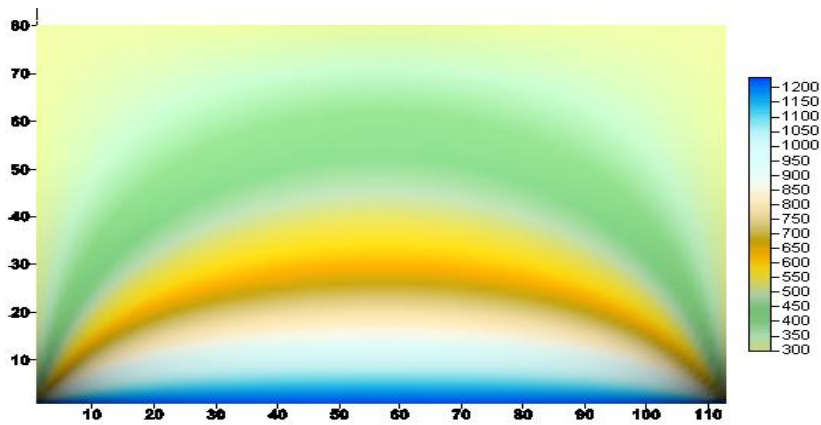
شكل (8) يبين توزيع خطوط تساوي درجة الحرارة لشريحة قريبة من العقب عند  $(i=50)$ .



شكل (9) يمثل انحدار درجات الحرارة خلال السطح لشريحة قريبة من العقب عند  $(i=50)$ .

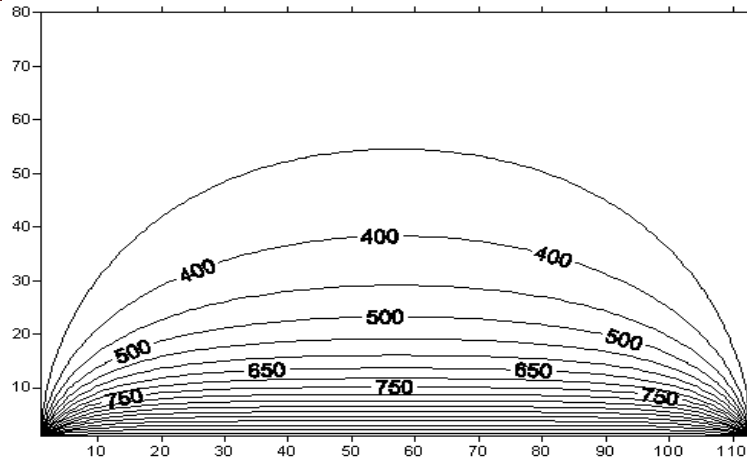


شكل (10) يبين توزيع خطوط تساوي درجة الحرارة لشريحة لا تحتوي على العقب عند  $(i=25)$

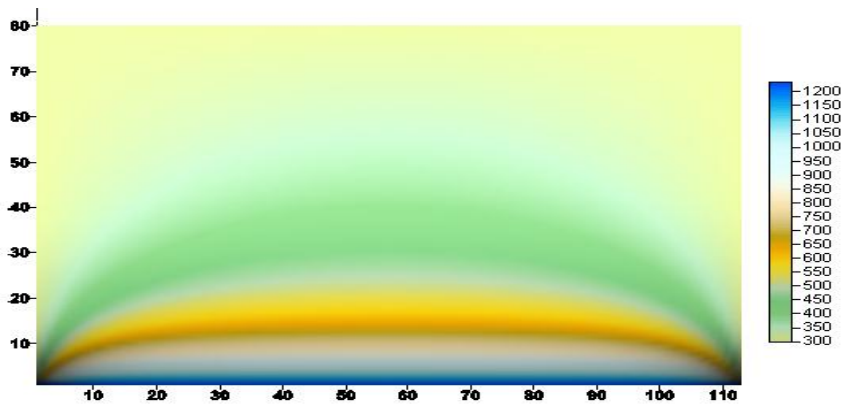


شكل (11) يمثل انحدار درجات الحرارة خلال السطح لشريحة لا تحتوي على العقب عند  $(i=25)$ .





شكل (12) يبين توزيع خطوط تساوي درجة الحرارة لشريحة لا تحتوي على العقب عند  $(i=10)$ .



شكل (13) يمثل انحدار درجات الحرارة خلال السطح لشريحة لا تحتوي على العقب عند  $(i=10)$

الشكل (4) يبين توزيع خطوط تساوي درجات الحرارة للشريحة المركزية لأنود مصهر الألومنيوم حيث أن كل

خط من الخطوط يختلف بمقدار  $50K^{\circ}$  عن الخط الذي يليه أو يسبقه .

ومن الملاحظ أن ازدياد درجات الحرارة أسفل العقب مباشرة كان بشكل تدريجي وبسيط ولكن كلما تعمقنا الى

الأسفل باتجاه الحد السفلي فإن التغير سيزداد وتصبح خطوط تساوي درجات الحرارة متقاربة ومتداخلة بشكل أكبر مما

كانت عليه، أما في المنطقتين الجانبيتين بالنسبة للعقب فإن التغير يميل الى التجانس لحد كبير خاصة في مركزيهما، كما

نلاحظ ان الزوايا السفلية يحدث فيها شد حراري كبير جداً بسبب وقوعها على زاوية التقاء منطقتين حديتين هما

السفلى والتي فيها درجة الحرارة  $1233\text{ k}$  والمناطق الجانبية المتأثرة بالمحيط اللاهوائي والتي درجة حرارتها  $300\text{ k}$  . و

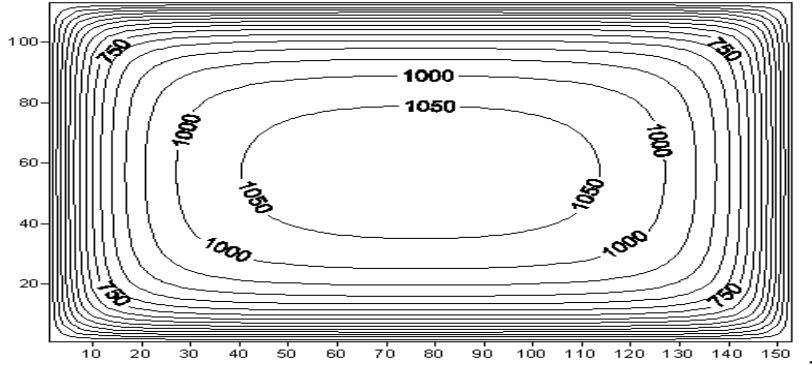
نلاحظ هذا الشد أيضاً في زوايا التقاء العقب و المصعد العليا، وأما الزوايا العليا للأنود فإن مقدار التغير فيها وحوطها

طفيف جداً .

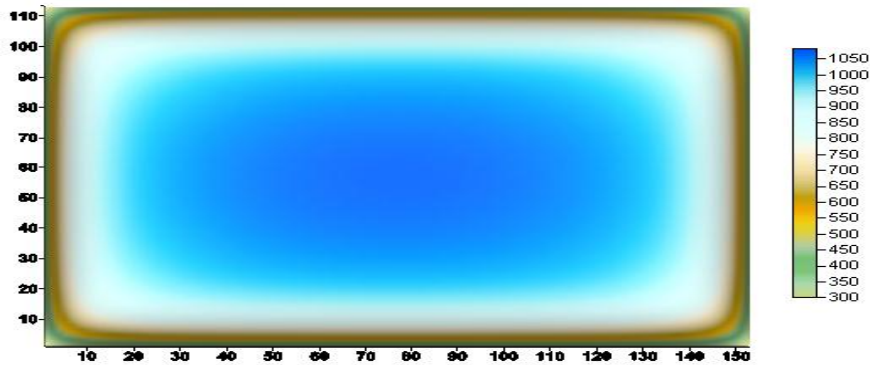
يمثل الشكل (5) انحدار درجات الحرارة خلال السطح للشريحة المركزية لأنود مصهر الألمنيوم، ونلاحظ من الشكل أن درجات الحرارة تبدأ في الانخفاض كلما ابتعدنا عن قاع المصعد.

أما الأشكال من (6-7) تبين خطوط توزيع درجات الحرارة لشريحة غير مركزية تحتوي على العقب، بينما الأشكال (7-13) توضح خطوط توزيع درجات الحرارة لشرائح لا تحتوي على عقب .

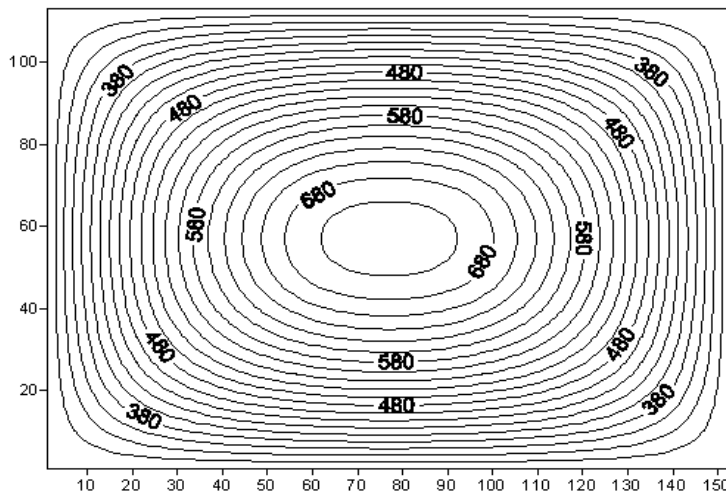
ثانياً- رسم الشرائح في اتجاه  $Z$ : م رسمت بعض الشرائح في اتجاه  $Z$  كما هو مبين في الأشكال الأتية



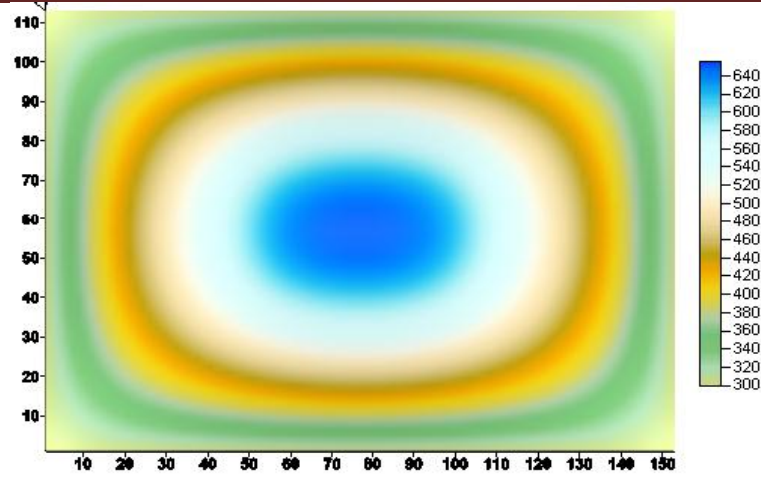
شكل (14) يبين توزيع خطوط تساوي درجة الحرارة لشريحة لا تحتوي على العقب عند  $(k=10)$ .



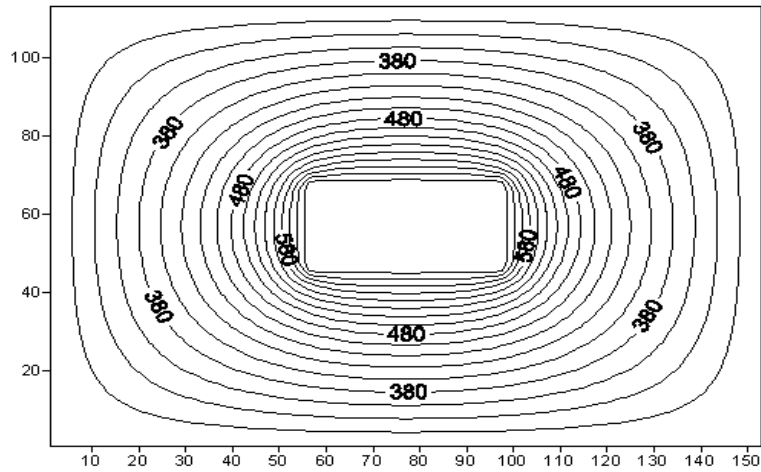
شكل (15) يمثل انحدار درجات الحرارة خلال السطح لشريحة لا تحتوي على العقب عند  $(k=10)$ .



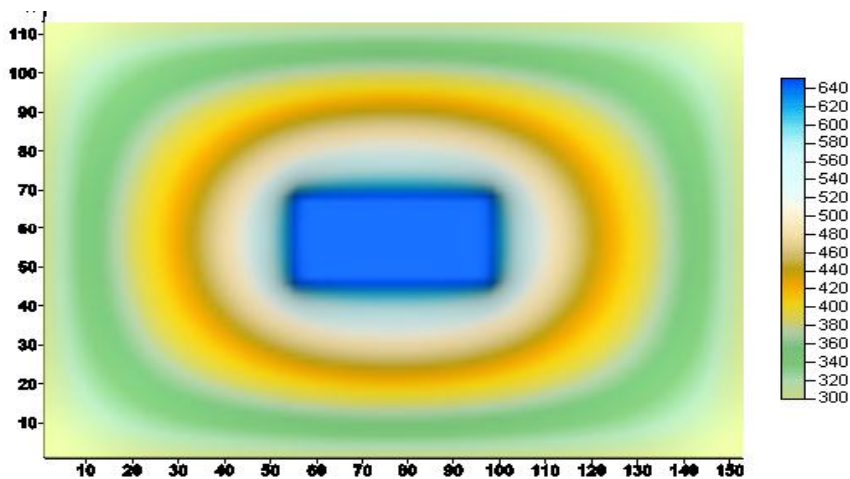
شكل (16) يبين توزيع خطوط تساوي درجة الحرارة لشريحة لا تحتوي على العقب عند  $(k=40)$ .



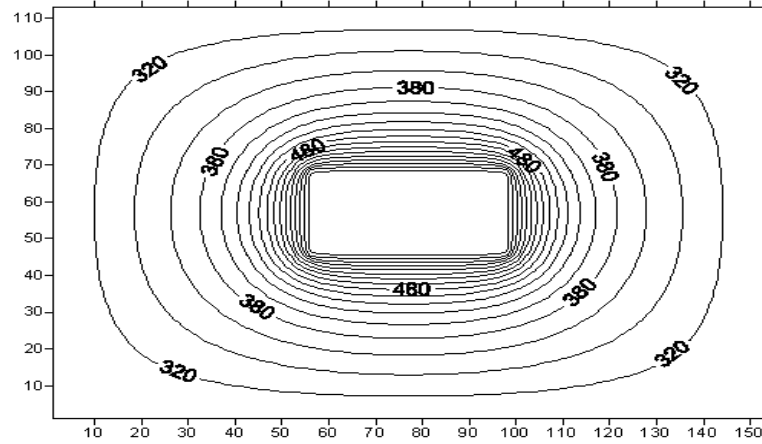
شكل (17) يمثل انحدار درجات الحرارة خلال السطح لشريحة لا تحتوي على العقب عند  $(k=40)$ .



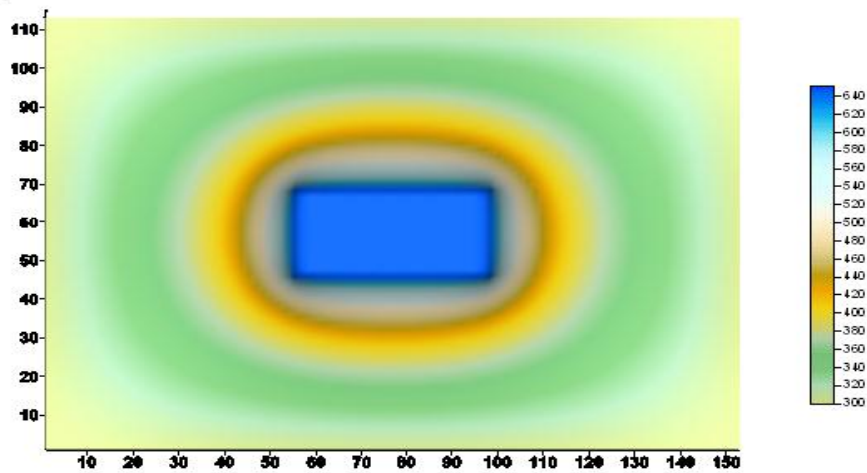
شكل (18) يبين توزيع خطوط تساوي درجة الحرارة لشريحة تحتوي على العقب عند  $(k=60)$ .



شكل (19) يمثل انحدار درجات الحرارة لشريحة تحتوي على العقب عند  $(k=60)$ .



شكل(20) يبين توزيع خطوط تساوي درجة الحرارة لشريحة تحتوي على العقب عند  $(k=69)$ .



شكل(21) يمثل انحدار درجات الحرارة خلال السطح لشريحة لا تحتوي على العقب عند  $(k=69)$ .

الأشكال السابقة (14- 21) تبين توزيع خطوط تساوي درجات الحرارة لبعض الشرائح في اتجاه Z حيث أن كل

خط من الخطوط يختلف بمقدار  $50k$  عن الخط الذي يليه أو يسبقه .

ومن الملاحظ في الشكلين (14,16) أن ازدياد درجات الحرارة في المنتصف كان بشكل تدريجي وبسيط ولكن كلما

اتجهن إلى الخارج فأن التغير سيزداد وتصبح خطوط تساوي درجات الحرارة متقاربة ومتداخلة بشكل أكبر مما كانت عليه.

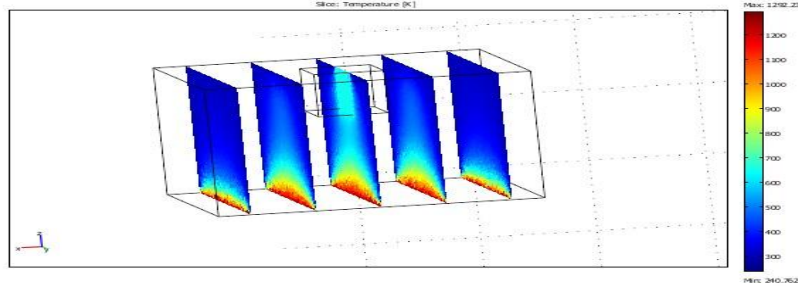
أما في الشكلين (18، 20) والتي تحتوي على العقب فإن التغير يميل إلى التجانس لحد كبير خاصة في الأطراف،

ولكن في المنتصف خطوط تساوي درجات الحرارة متقاربة ومتداخلة بشكل أكبر.

## مقارنة النتائج:

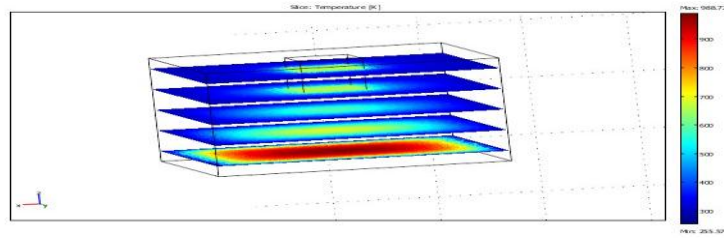
باستخدام البرنامج العالمي COMSOL<sup>®</sup> Multiphysics الإصدار الثالث تم التأكد من صحة النتائج المتحصل عليها بطريقة العناصر المحددة (Finite element method) وتبين ذلك من خلال الأشكال التالية:

- رسم الشرائح في اتجاه  $x$ :



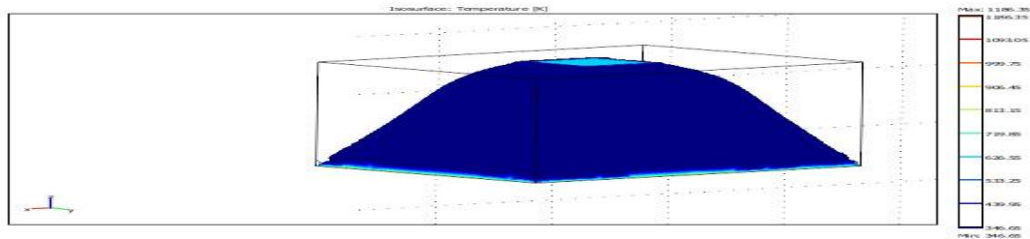
الشكل (24) يبين توزيع درجات الحرارة لشرائح المتعامدة على المحور  $x$ .

- رسم الشرائح في اتجاه  $z$ :



الشكل (25) يبين توزيع درجات الحرارة لشرائح المتعامدة على المحور  $z$ .

- سطوح تساوي الجهد للنظام



الشكل (26) يبين توزيع سطوح تساوي درجات الحرارة للنظام.

ومن خلال هذه الأشكال كانت النتائج متقاربة بشكل جيد ، ومعرفة التوزيع الحراري المستقر للأنود أمر في غاية الأهمية فبمعرفتنا للتوزيع الحراري يمكن تعيين الإجهادات الحرارية، والتمددات، والانحرافات التي تحدث فيه وتسبب في كسره واستهلاكه قبل الآوان. فبمجرد معرفة التوزيع الحراري يمكننا حساب معدل انتقال الحرارة عند أي نقطة في النظام أو على سطحه من قانون فوريه [10,1].

#### الأعمال المستقبلية :

يمكن اعتبار هذا العمل خطوة على طريق دراسة منظومة مصاهر الألومنيوم بطريقة مبسطة بعيداً عن التعقيد الذي صاحب هذا النوع من الدراسات .

ويمكن استكمال هذه الدراسة بأخرى أكثر تعمقاً وذلك بإضافة متغيرات فيزيائية أخرى مثل الضغط الميكانيكي و المقاومة الكهربائية وأثرها على توزيع الحرارة داخل الأنود أي بمعنى دراسة النظام كهروحرارياً.

#### Abstract:

Temperature distribution in the anode of aluminum smelter in its steady state has studied using a computer simulation method , in which the temperature at each grid point , whether they are at the surface of the anode or deeper inside were calculated by our local computer simulation code .

Heat equation has been used to find the temperature at each grid point in three dimensions along with the boundary conditions of the problem results in a set of differential equations which can be transformed into finite difference from, In this case the set of equations can be considered as a set of simultaneous linear algebraic equations that can solved numerically by the well know successive over relaxation method (SOR).

A local computer simulation code has been developed to find the temperature at each grid point inside the anode for three dimension .

The obtained results are in a very good agreement with the well know international code called COMSOL® Multiphysics

#### المراجع:

1. Bhalchandra , K.V. and Desmond , R.M., ( 1982 ) , Heat transfer , West Publishing Company ,America , pp.29-37
2. Totten, G.E. and Mackenzie , D.S., ( 2003) , Handbook of aluminum , Marcel Dehher , Inc , Newyork , Vol.2 , pp. 5-12
3. Frank,K. , Manglik, R.M. , and Bohn, M.S. ,(2011) , Principle of heat transfer, Cengage Learning, Seventh Edition, pp.71-90
4. Bradley, B.F. and Macmillan , D.W. ,( 1977 ) ,Voltage distribution in an aluminum smelter prebaked anode , Appl. Math. Modeling ,Vol 1, pp. 339-343 .

5. Tabsh, I. and Dupuis, M., (1995) , Modeling of aluminum reduction cells using finite element analysis techniques , Light Metals , pp. 295-299.
6. Jan, H. and Shihuan, Y. ,(2004), Relations between cell superheats , freeze shape and heat loss, Workshop in numerical simulations for aluminum industry, EPF-laussana- Swizerland, September 30<sup>th</sup> - October 2<sup>nd</sup>,pp. 1-9
7. Cheney, W. and Kincaid, D., (2012) , Numerical mathematics and computing, Seventh Edition ,Thomson Brooks/Cole, pp. 566-578
8. Karunanithi, S., Gajalakshmi, N. Malarvizhi, M. , and Saileshwari, M. , (2018), A study on comparison of Jacobi, Gauss-Seidel and Sor methods for solution in system of linear equations, International Journal of Mathematics Trends and Technology (IJMTT) – Vol 56, pp. 214-222.
9. Hjorth- Jensen, M. ,(2012), Computational physics ,University of Oslo,pp.313-323
10. Dupuis, M.,(1998), Aluminum electrolysis process simulation , Analysis Solution, pp. 26-31.