استخدام الطريقة البيانية في حل مشاكل البرمجـــــة الخطية ذات الثلاث متغيرات قراريـــه

الدكتور / عبدالله محمد الشـــيـخ الاستاذ / إمحمد مصطفى بازينة

الاستــاذ / الصديق ابراهيم بالحـــاج الاستاذة / هاجر أحمــــد الشريف

الملخـــص :

مشكـــلة الـــدراسة فـي هـــذه الـــورقة تنـدرج تحت نمـــوذج البـرمجة الخطـــية (Linear Programming Model) ، وهي مـن أهـم نمـاذج بحـوث العمـليات (Operational Research) التي تستخدم في علم الإدارة كأداة لاتخاذ القرارات المتعلقة بالتخطيط لاستخدام الموارد المحدودة لغرض توزيعها بين البدائل المتعددة ، بهدف تعظيم (Maximization) العائد أو بهدف تقليل (Minimization) التكلفة أو الوقت ، ويتم هذا في ظل عدد من القيود (Constraints) ، التي تحـد من القدرة على التعظيـم أو التقليـل ، مثل محدودية الوقت المتاح للتصنيع أو محدودية توفر المواد الخام ، الطاقة الاستيعابية للسوق ، مواصفات قياسية لعملية التصنيع والتي عادةً ما تكون في مشاكل تحديد المزيج الإنتاجي الأمثل عند خلط مجموعة من المواد بهدف إنتاج منتج جديد.

إن الآليـة المتبـعة في حـل مشاكل البرمجة الخطية تبدأ أولاً بعملية بناء النموذج الرياضي للمشكلة ، والذي يجب أن يجسدها تجسيداً كاملاً ، وذلك عن طريق بناء معادلة دالة الهدف والتي إما أن تهدف للتعظيم (Max) أو للتقليل (Min) وبناء المعادلات التي تمثل قيود المشكلة ، والتي تمثل كل الشروط التي يجب أن تُحل المشكلة في ظلها ، وبعد عملية بناء النموذج الرياضي ، تأتي عملية حل النموذج ، وهو استخدام طريقة رياضية معينة لحل ذلك النموذج ، وهنا توجد عدة طرق يمكن استخدامها في حل النموذج الرياضي للبرمجة الخطية ، نذكر منها هنا طريقة السمبلكس (Simplex Method) والطريقة البيانية (Graphical Method) ، والأخيرة هي محل الدراسة لهذه الورقة.

بعد الاطلاع على المصادر والمراجع العربية ، نؤكد بأن معظمها تناولت استخدام الطريقة البيانية كأداة لحل مشاكل البرمجة الخطية التي يكـون فيها عدد المتغيـرات القـرارية اثنان فقط (x_1 , x_2) ، لأنه يتم استخدام محورين فقط على الرسم البياني وهما المحور الأفقي (x-axis) والمحور العمودي (y-axis) .

تهـدف هذه الورقة لإلقاء الضوء على الطريقة البيانية في حـل مشاكل البـرمجة الخطية ، بهدف الوقوف على مـدى قدرتها في حل مشـاكل البرمجة الخطية ذات ثلاثة متغيرات (x_1 , x_2 , x_3) في ظل تعدد وتنوع القيود المحددة للمشكلة ، وقد تم دراسة وتحليل الخطوات المستخدمة في المشاكل في حالة وجود متغيرين ، بالإضافة إلى استخدام لغة البرمجة R في رسم المعادلات والمتباينات ذات الثلاثة متغيرات ، وهي لغة تستخدم في التحليلات الإحصائية ((R Core Team (2013) أنظر المرجع رقم (15) ، ونعني بذلك استـخدام هذا البرنامج في الرســم البياني ذو الثلاثة أبعـــاد (Three Deamination) والذي يُعرف بـ (3 D) ، فهـذا قد

*ساعدنا على تخيل شكل القيود ذات الثلاثة أبعاد وبالتالي تحديد منطقة الحلول الممكنة . في نهاية هذه الورقة تمكنا من رسم وفهم شكل القيود (المعادلات والمتباينات) ذات الثلاثة متغيرات بمختلف أنواعها (من حيث عدد المتغيرات في القيد ومن حيث اختلاف إشارات القيود (≤ ، ≥ ، =)) ، هذه تعتبر بمثابة قاعدة متينة تمكن القارئ من فهم منطقة الحلول الممكنة ، وبالتالي يسهل تحديد نقاطها الطرفية التي يتم اختبارها لتحديد الحل الأمثل من بينها ،كما تم في نهاية هذه الورقة حل مثال (ذو ثلاث متغيرات) متنوع القيود ، وقد تم تتبع خطوات الحل للطريقة البيانية عن طريق استخدام طريقة السمبلكس (**Simplex Method**) .*

*الكلمات الدالة (**Keywords**): البرمجة الخطية ، الطريقة البيانية ، طريقة السمبلكس ، القيود ، المتغيرات القرارية ، منطقة الحلول ، الحل الأمثل .*

المقدمـــــة :

بحوث العمليات (Operational Research) وتسمى أيضاً بعلم الإدارة (Management Science) ويرمز لها بـ (OR) ويرمز (MS) ، إلا أن الاسم الشائع في معظم دول العالم هو بحوث العمليات ، أما (MS) فهو أكثر شيوعاً في الولايات المتحدة الأمريكية ، يعتبر هذا العلم هو أحد فروع علم الرياضيات التطبيقية الحديثة ، الذي يستخدم الأساليب المنطقية والطرق العلمية (الأساليب الرياضية والتحليلات الإحصائية) في تحليل البيانات لغرض تقليص عملية الاعتماد على الحدس والتخمين والتجربة ، وطبعاً استخدام هذا العلم نتائجه مضمونة ، ففي كثير من الأحيان يحقق الحل الامثل (Optimal Solution) ، وخير مثال على ذلك هو تطبيق نموذج البرمجة الخطية (Linear Programming Model) ، وفي مشاكل أخرى كـ مشاكل تحديد المواقع (Location Problems) يستحيل في بعضٍ منها الوصول إلى الحل الأمثل ، لأن العمليات الرياضية اللازمة للوصول للحل الأمثل مطولة ، ولا يمكن حلها يدوياً ، ويحتاج حلها برمجة المشكلة بإحدى لغات البرمجة كلغة (C++) ، ويحتاج الحاسوب لتكرار خطوات الحل المطولة لعدد كبير جداً من المرات ، وهذا يتطلب وقتاً طويلاً جداً قد يصل إلى عقود من الزمن ، لذلك يستخدم علم بحوث العمليات أساليب تقريبية تسمى (Heuristic Methods) لتقليص الفترة الزمنية اللازمة للوصول للحل الأمثل ، مقابل التضحية بالحل الأمثل ، وتحقيق حل يكون قريباً من الحل الأمثل (Near Optimal).

يستخدم علم بحوث العمليات في حل كل المعضلات الواقعية المعقدة التي تكون معطياتها بيانات كمية (Quantitative) ، وذلك بفحص الخصائص البارزة لمحاور المشكلة الواقعية ، ومن ثم تحديد الأسلوب الرياضي المناسب لحل هذه المعضلة المعقدة بناء على الإمكانات المتاحة ، كل ذلك يتم عبر طرق منطقية رياضية ، يطلق عليها نماذج بحوث العمليات (Operational Research Models) ، ويمكن الإشارة إلى أنه هنالك نماذج عامة (General Models) وهذه النماذج الرياضية جاهزة معتمدة عالمياً وغير متجانسة، كما أنها لا تعالج نفس الموضوعات أو موضوعات معينة بذاتها ، وتستخدم في حل المعضلات الواقعية شائعة الحدوث في الحياة العملية ، وهي عبارة عن إطار رياضي مرن قابل للتطويع وفقاً لطبيعة المشكلة ، وتوجد نماذج أخرى خاصة (Special Models) يتم تصميم كل منها بما يخدم مشكلة واقعية ما لها خصوصيتها ، وبصفة عامة يمكن القول إن

كل نموذج أشبه بإطار رياضي تحليلي يتم انتقاؤه أو تصميمه لتوضع فيه المشكلة (الموضوع) بغية معالجتها ، وصولاً للحل الأمثل أو القريب من الأمثل وفقاً لنوع وطبيعة المشكلة .

هناك من يرى بأن البداية الفعلية لهذا العلم انطلقت أثناء الحرب العالمية الثانية في بريطانيا ، عندما قامت الحكومة البريطانية بتكليف فريقٍ من كبار العلماء بدراسة كيفية توزيع مواردها العسكرية المحدودة ، بما يتناسب مع أفضل وضع دفاعي جوي وبري، وأطلق على هذه الدراسات اسم بحوث العمليات أو (البحث العملياتي) ، وإن كثيراً من انتصارات الجيش الانجليزي تعزى إلى تطبيق هذه الدراسات ، وقد حظي هذا العلم بتطبيقات واسعة في النصف الثاني من القرن الماضي في مختلف مجالات الحياة عبر العالم ، وقد حققت هذه التطبيقات نجاحات باهرة ، الأمر الذي أدى إلى تعدد نماذجها ، ليخصص كل نموذج لحل مشكلة معينة في جانب معين .

1. تطبيقات نماذج بحوث العمليات (Applications of Operational Research Models):

إن مجالات تطبيق علم بحوث العمليات واسعة النطاق ، وعموماً يمكن القول أن أي مشكلة يتوفر حولها قدر من المعلومات الكمية فإنه يمكن معالجتها لإيجاد الحل المناسب لها عن طريق بناء نموذج رياضي خاص بها وفقاً لمنهج بحوث العمليات ، وهنا سنقوم بعرض سريع لبعض التطبيقات العامة لنماذج بحوث العمليات على سبيل المثال لا الحصر:

– نموذج البرمجة الخطية (Linear programming): ويستخدم في تخطيط الإنتاج وتحديد الخلطة المثلى للمنتج وفقاً للمواصفات الفنية للمنتج بهدف تعظيم العائد أو تقليل التكلفة علاوة على توزيع الأفراد على الأنشطة الواجب إنجازها.

– نمـاذج النـقل (Transportation Models):

ويعنى هذا النموذج بإعداد الخطة المثلى لنقل الأفراد في المؤسسات العامة والخاصة ؛ أو لنقل عنصرٍ ما ، من مصدرٍ ما أو عددٍ من المصادر ؛ إلى جهةٍ ما أو عددٍ من الجهات بأقل تكلفة نقل ممكنة .

–نظرية صفوف الانتظار (Queuing Theory):

وتستخدم لتقليص الطوابير في مختلف الأماكن كالموانئ ومحطات الوقود ، وإشارات المرور ، والبنوك ومراكز الخدمات العامة كالمستشفيات ، مصلحة الجوازات والضرائب.. إلخ

–تحليل ماركوف (Markov Analysis):

وهو تكنيك إحصائي يستخدم في التنبؤ بالسلوك في المستقبل على أساس دراسة الواقع الحالي ، ويستخدم في عدة مجالات أهما التسويق حيث يستخدم في التنبؤ بالحصص السوقية للشركات المتنافسة.

–أسلوب المسار الحرج & تقييم ومراجعة المشروع (CPM & PERT):

وتستخدم هذه الأساليب في التخطيط لمشاريع البنية التحتية كالمباني وشبكات المياه والصرف الصحي وتعبيد الطرق الكبرى ، بهدف تنفيذ المشروع في وقته المحدد وبأقل تكلفة ، وقد استخدم أيضاً في تخطيط العمليات الجراحية التي تستغرق وقتاً طويلاً بهدف ضغط زمن إجراء العملية .

–الخدمات اللوجستية (Logistics Services) :

إن النماذج التي تستخدم في الخدمات اللوجستية متعددة ومتنوعة سنذكر بعضاً منها على سبيل المثال لا الحصر كالتالي:

–مشاكل المواقع (Location Problems) :

إن هذا العلم يهتم بالإجابة على السؤال التالي (أين نضع الأشياء؟) ، فهو يستخدم في تحديد مواقع المدارس بهدف جعلها أقرب ما يمكن إلى تجمعات السكان ، وبالعكس تماماً في حالة تحديد مواقع مكبات القمامة والمفاعلات النووية لتكون أبعد ما يمكن على التجمعات السكنية ، وعند تحديد مواقع الخدمات الضرورية (مستشفيات وسيارات الإسعاف ومراكز الشرطة والدفاع المدني ..الخ) فيتم ذلك على أساس المسافة الحرجة التي يجب ألا يتجاوزها الموقع في بعده عن متلقي الخدمة ، وينطبق هذا على مواقع البث التلفزيوني ومحطات بث إشارات الهواتف النقالة.

–مشاكلة توجيه السيارة (vehicle routing problem) :

فهذا النموذج يهتم بدراسة الشبكات لتحديد الحركة المثلى لحركة دوران الحافلات وفي تحديد خط سير حركة بعض الأفراد أو الأشياء كساعي البريد موزعي فواتير المياه والكهرباء ، حركة سير عربات نقل النفايات والقمامة .

–أساليب التجميع (Clustering Methods)

يستخدم لتصنيف الأشياء بهدف التعامل معها أساساً على هيئة حزم ذات خصائص متقاربة ، حالياً يستخدم هذا التكنيك على نطاقٍ واسع ، إن استخدامات هذا النموذج لا يمكن حصرها ، وسنذكر منها على سبيل المثال ما يلي : فمثلاً في مجال التسويق لتصنيف المستهلكين في قطاعات السوق ..، ويستخدم في الجانب الأمني للمساعدة في تحليل الجريمة بهدف تحديد المناطق التي ينتشر فيها نمطٌ معين من الجرائم ، ويتم الاستعانة به في تجميع البيانات الوراثية وذلك بتصنيف الجينات والحمض النووي (DNA) بهدف الوصول إلى استنتاجات لتحليل أنماط المقاومة للمضادات الحيوية.

2. البرمجة الخطية (Linear Programming):

يستخدم متخذ القرار نموذج البرمجة الخطية كأداة لاتخاذ القرارات المتعلقة بتوزيع الموارد المحدودة ، لغرض المفاضلة بين البدائل المتعددة ، والتي قد تكون غير نهائية في أحياناً كثيرة ، وذلك بهدف تحقيق أعظم عائد يمكن تحققه من هذه المـوارد ، أو أن تكون تهــدف للتقليل لضــغط التكاليف إلى أقل قيمة ممكنة . أن نموذج البرمجة الخطية كغيره من العديد من نماذج بحوث العمليات الأخرى التي استخدمت في مراحل تطويرها الأولى في المجالات العسكرية ، ونتيجة لضعف أساليب التفضيل التقليدية ، كطريقة لاغــرانــج

(Lagrange) ، اكتشف جورج دانتزغ (**George Dantzig**) عضو الفريق الأمريكي لبحوث العمليات سنة 1947م ، طريقة السمبلكس (**Simplex Method**) لحل مسائل البرمجة الخطية ، وقد انتشر استخدامها في الحياة المدنية في مجالات متعددة ، مثل تحديد المزيج الإنتاجي الأمثل الذي يحقق أقل تكلفة ، وتحديد التوليفة المناسبة من المنتجات التي يمكن أن تحقق أعظم ربح ، وتحديد خلطة الغذاء المثالية ، وتخصيص الأفراد (توزيع العناصر على الأعمال الواجب إنجازها) ، كما يستخدم في مجالات كالتسويق والتمويل وغيرها.

تُعرّف البرمجة الخطية بأنها وسيلة رياضية ، كمية صممت لمساعدة متخذ القرار في اتخاذ قراره المتعلق بتحديد قيم المتغيرات القرارية (الموارد) المتاحة والمحددة بقيود (**Constraints**) يجب أن تحل المشكلة في ظلها، وفي ظل دالة الهدف (**Objective Function**) التي تهدف إما للتعظيم كتعظيم العائد أو للتقليل كتخفيض التكاليف أو الوقت .. الخ . إلا إن تطبيق هذا النموذج يتطلب توفر اشتراطات معينة يجب أن تتحقق لكي يتمكن متخذ القرار من استخدامها كأداة لاتخاذ قراره ، وهي كالتالي:

1.3 متطلبات مشكلة البرمجة الخطية

(Requirements of Linear programming problem):

هنالك شروط يجب توفرها في معطيات المشكلة المراد حلها باستخدام أسلوب البرمجة الخطية ، وسيتم عرض هذه المتطلبات أو الاحتياجات بشكل موجز، وهي كالتالي:

- **الخطية (Linearity):**

يقصد بالخطية هنا ، هو أن دالة الهدف المراد الوصول إليها بحل المشكلة يمكن تمثيلها بمعادلة من الدرجة الأولى ، كما أن القيود أو الشروط المحددة للمشكلة يمكن التعبير عنها أيضاً بمعادلات أو متباينات من الدرجة الأولى ، وهذا يعني أن كل المتغيرات (الرموز) المستخدمة في مشكلة البرمجة الخطية مرفوعة للأساس واحد ولا يقبل أن تكون الرموز مرفوعة للقوة اثنين أو أكثر، وإن أي من هذه المعادلات أو المتباينات عند التعبير عنها بيانيا تظهر على شكل خط مستقيم .

- **وجود هدف (Objective Function):**

لابد من وجود هدف واضح ومحدد وبشكل كمي لمشكلة البرمجة الخطية ، يمكن التعبير عنه في شكل معادلة ، والتي يمكن أن تهدف إلى تعظيم (**Maximization**) متغير ما كالربحية أو تهدف إلى تقليل (**Minimization**) متغير ما كالتكلفة أو الوقت ، بالتالي فإن الهدف يتعلق بتعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف وليس الاثنين معاً.

- **القيـود (Constraints) :**

كل مشكلة تحتوي على عدد من القيود تتناسب مع درجة تعقيدها ، ويجب أن تتوفر إمكانية تجسيد كل قيد في معادلة أو متباينة من الدرجة الأولى ، والتي تعبر عن محددات المشكلة ، كأن تكون مصادر محدودة قد تتمثل في محدودية الموارد المالية ، أو الطاقة

الإنتاجية ، أو لتحديد مواصفات فنية للمنتج ، أو تمثل القدرة الاستيعابية للسوق ...وغيرها ، بالإضافة لوجود قيد عدم السلبية والذي يفترض بأن تكون قيم المتغيرات القرارية الناتجة من حل النموذج قيم موجبة ، وهذ يعني بيانياً بأن منطقة الحل يجب أن تكون في الربع الموجب وهو الربع الأول على خط الأعداد.

- **البدائل (Alternative) :**

لابد وأن يتوفر في نموذج البرمجة الخطية عدة بدائل ، وحل النموذج الرياضي يعني تحديد أفضل البدائل (الحلول البديلة للمشكلة) ومن ثم الوصول إلى الحل الأمثل لهذه البدائل ، ويعبر عنها بيانياً عن طريق تحديد منطقة الحلول الممكنة للمشكلة ، فإذا تبين بأنه لا يوجد منطقة حلول ممكنة على الرسم ، فهذا يعني أنه لا يوجد بدائل للحل ، وبالتالي لا يوجد حل للمشكلة ، أما إذا تبين وجود منطقة حل فيتم تحديد البديل الأمثل (الحل الأمثل) من بين تلك البدائل ، وذلك باستخدام دالة الهدف (**Max or Min**) في فحص تلك البدائل لغرض تحديد الأمثل من بينها .

2.3 الطرق المستخدمة في حل النموذج الرياضي للبرمجة الخطية :

بعد بناء النموذج الرياضي للمشكلة ، والذي يتمثل في دالة الهدف والقيود، والتي يجب أن تجسد المشكلة ، حتى نضمن أن الحل الرياضي لهذا النموذج يمثل الحل الأمثل للمشكلة ، لذلك لابد من الفهم الجيد والكامل للمشكلة موضوع الدراسة ، تبدأ عملية حل النموذج ، هناك طريقتان أساسيتان لحل نماذج البرمجة الخطية وهما الطريقة البيانية (Graphical Method) وهي محل الدراسة في هذه الورقة ، وسيتم تناولها لاحقاً ، أما الطريقة الثانية وهي طريق السمبلكس (Simplex Method) وتسمى أيضاً بالطريقة المبسطة ، تعتمد هذه الطريقة على اتباع عدد من الخطوات المرتبة بشكل منطقي ، تبدأ بتحديد حل مبدئي للمشكلة ، ومن ثم تحسين الحل بالانتقال إلى حل آخر أفضل منه عن طريق إحلال متغير محل متغير آخر ، ويتم تكرار هذه الخطوات عدة مرات إلى حين الوصول إلى حل لا يمكن تحسينه والذي يمثل الحل الأمثل للمشكلة ، والجدير بالذكر هنا هو أن عملية تحسين الحل تعني بيانياً التحرك على النقاط الطرفية لمنطقة الحلول الممكنة ، وقد أصبحت هذه الطريقة شائعة الاستخدام بعد ظهور الحاسوب وتوفر البرامج المعدة لحل هذه المشاكل .

3. مشكلة الدراســة:

مشكـلة الـــدراسة فــي هـــذه الـــورقة تنـــدرج تحـــت نمـــوذج البـــرمجة الخطـــية (Linear Programming Model) أحد أساليب بحوث العمليات الذي يعتبر أفضل الأساليب الرياضية العلمية في علم الإدارة التي تساعد في اتخاذ أفضل القرارات في معالجة المشكلات الواقعية ، ويستخدم هذا الأسلوب في الكثير من المجالات ويلعب دوراً مهماً في تحقيق التوزيع الأمثل للموارد المحدودة على الأنشطة المتعددة والمختلفة في ظل قيود محددة وفقاً للهدف المراد تحقيقه، بمعنى آخر هو إيجاد النهاية العظمى لدالة الهدف (Maximum Point) إذا كان الهدف المطلوب ربحاً، أو إيجاد النهاية الصغرى (Minimum Point) لما إذا كان الهدف تقليل التكلفة أو الوقت ، طبعاً يكون هذا في ظل قيــود (Constraints) محددة للمشكلة.

بعد الانتهاء من عملية بناء النموذج الرياضي ، تبدأ عملية حل النموذج ، وفق إحدى الطرق كطريقة السمبلكس (Simplex Method) أو الطريقة البيانية (Graphical Method) .

والجدير بالذكر هنا هو أن معظم الكتب والمراجع تشير إلى أن الطريقة البيانية تستخدم في حل المشاكل الخطية التي عدد متغيراتها القرارية اثنين (x_1 , x_2) ، لأن عدد المحاور المستخدمة في الرسم البياني اثنين فقط وهما المحور الأفقي والمحور العمودي (y-axis ، x-axis)، وبذلك يتم تمثيل كل متغير على محور . وفي هذه الورقة سيتم دراسة وتحليل هذه الطريقة (البيانية) للتأكيد على قدرتها حل مشكلة البرمجة خطية تحتوي على ثلاثة متغيرات قرارية ولعدد من القيود ، استناداً على أن عدد الأبعاد (المحاور) التي يمكن استخدامها في الرسم ثلاثة أبعاد (3 D) ، بمعنى ثلاثة محاور (x-axis ، y-axis ، z-axis) ، مع محاولة لإيجاد تحليل منطقي لذلك بناء على استخدام طريقة السمبلكس (Simplex Method) كمرشد للطريقة البيانية .

ونؤكد هنا أنه بعد الاطلاع ومراجعة أدبيات الموضوع ، تبين أنه لا يوجد اتفاق شامل بين المؤلفين حول ما مدى إمكانية استخدام الطريقة البيانية في حل مشكلة تحتوي على ثلاثة متغيرات ، ويمكن تصنيف وجهات نظرهم كالتالي:

i) الفريق الأول منهم لم يتعرضوا لمناقشة هذه الظاهرة أصلاً واكتفوا بالحديث عن استخدام الطريقة البيانية في حالة وجود متغيرين فقط كالمنصوري (1996)، حسين (1999)، الكبيسي (1999)، الفياض (2007)، الجواد(2008)، كعبور (1992)، حسين (2009)، حمدان (2010)، الفضل (2010) .

ii) والفريق الأخر كفرحات (1998)، الصفدي (1999)، الشيخ (2009)، الجنابي (2010)، والنعيمي (2011)، الموسوي (2009)، وعبيدات (2005)، مرجان (2002)، (2010) Lieberman ، لم يناقشوا هذه الظاهرة ورأوا بأنه يمكن حل مشكلة البرمجة الخطية التي تحتوي على ثلاثة متغيرات عن طريق الرسم ثلاثي الأبعاد ولكن دون التطرق بالشرح عن كيفية تطبيق هذا النوع من الرسم ، وكذلك عدم إيضاح الكيفية التي يمكن اتباعها لإيجاد الحل الأمثل أو الحل الممكن.

iii) اما العتوم (2005) ، فقد أوضح في كتابه رسماً لإحدى مشاكل البرمجة الخطية والتي احتوت على ثلاثة متغيرات ، ولكن دون ذكر وتوضيح الخطوات المتبعة في الرسم وعدم تحديد منطقة الحلول الممكنة للشكل المتحصل عليه.

بناءً على ما ذكر أعلاه تهدف هذه الورقة لدراسة الطريقة البيانية لمعرفة ما مدى إمكانية استخدامها في حل مشكلة خطية ذات ثلاثة متغيرات ، ومعرفة المعوقات أو الصعوبات التي تعيق استخدامها .

فكما سبق الذكر فإن معظم كتبنا العربية لم تتعرض إلى استخدام الطريقة البيانية في حل مشاكل البرمجة الخطية في حالة وجود ثلاثة متغيرات ، وعدد محدود جداً من الكتب العربية ذكروا فقط إمكانية استخدامها ، دون توضيح كيف يمكن القيام بذلك ، ودون وضع رسوم بيانية توضيحية لقيود بها ثلاثة متغيرات ، ودون التعرض لتأثير إشارات القيود وعدد القيود التي يحتويها الشكل البياني لها . إلا أنه توجد مراجع أجنبية (مواقع أجنبية) تؤكد قدرة استخدامها وموضحة الكيفية التي تمت بها هذه العملية بالإضافة

للشكل البياني لقيودها ، ومن بين هذه المراجع أنظر المرجع (16) الذي يؤكد إمكانية استخدام الطريقة البيانية في حل مشكلة ذات ثلاثة متغيرات مع التأكيد على عدم سهولة رسمها .

وهنا سيتم أخذ مثال تطبيقي وحله باستخدام برنامج (R) ، ومتابعة الحل باستخدام طريقة السمبلكس حتى تتضح هذه الطريقة للقارئ ، مع استخدام عدة رسوم بيانية توضح الكيفية التي يكون عليها شكل المتباينات المتنوعة من حيث عدد المتغيرات ونوع الإشارات ($\leq$ ، $\geq$ ، $=$) ، وكيف تكون طبيعة منطقة الحلول الممكنة لمشكلة برمجة خطية ذات ثلاثة متغيرات ، والنقاط الطرفية الركنية المحددة لها . وحتى يتم تحقيق ما ذكر أعلاه بسلاسة ، لابد من توضيح آلية عمل هذه الطريقة في حالة وجود متغيرين فقط .

4. الطريقة البيانية في وجود عدد متغيرين (Graphical Method in two Variables):

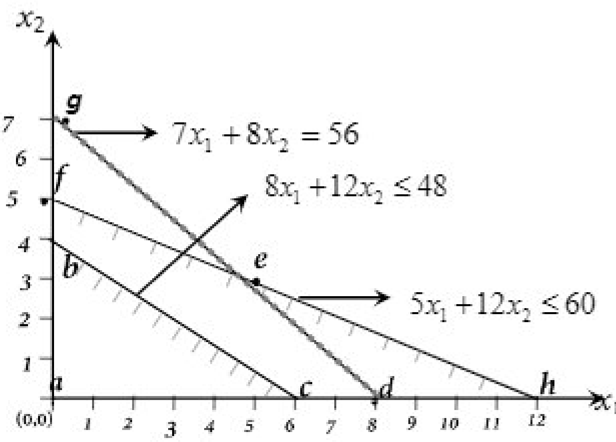
هذه الورقة تسلط الضوء على الطريقة البيانية للتأكيد على قدرتها في حل مشاكل البرمجة الخطية التي تحتوي على ثلاثة متغيرات قرارية ، وفي هذه الفقرة سيتم عرض خطوات الحل لهذه الطريقة في حالة وجود متغيرين فقط ، وذلك كتمهيد لاستخدام هذه الطريقة في حل مشكلة بها ثلاثة متغيرات ، وهذه الخطوات بشكل موجز كالتالي:

i) تمثيل قيود (Constraints) المشكلة بيانياً على محاور خط الأعداد (المحور الأفقي والمحور العمودي) ، بمعنى آخر تمثيل المتغيرات القرارية (x_1 ، x_2) كلاً منهما على محور، وذلك برسم المعادلات أو المتباينات المحددة للمشكلة على شكل خطوط مستقيمة ، عن طريق تحديد نقطتي تقاطع الخط المستقيم مع المحورالأفقي والمحور العمودي ، ويمكن أن يتم ذلك عن طريق تثبيت المتغير الأول ، وأخذ قيمة المتغير الثاني والعكس بالعكس.

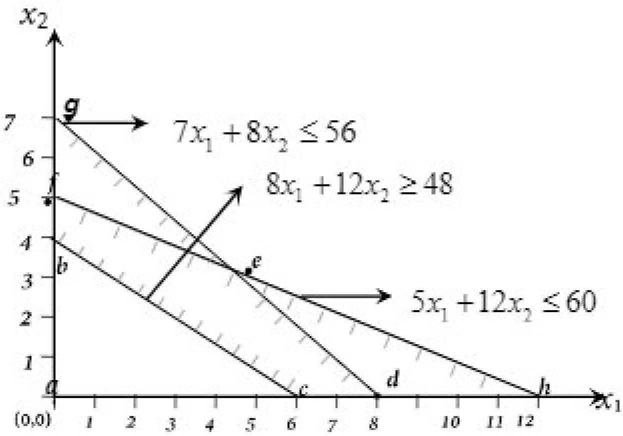
ii) هل يوجد منطقة حلول ممكنة للمشكلة؟

نؤكد هنا أن أي مشكلة البرمجة الخطية يمكن أن لا يكون لها حل ، وذلك نتيجة لتعارض قيد أو أكثر مع بعضها البعض ، بمعنى آخر لا يوجد أي نقطة يمكنها أن ترضي كافة قيود المشكلة ، وهنا يتم التوقف عن خطوات الحل ، لأن هذا يعني عدم وجود حل للمشكلة أصلاً ، وفي المقابل إذا وجدت منطقة حلول ممكنة ننتقل للخطوة التالية:

iii) تحديد منطقة الحلول الممكنة ، وهنا نؤكد بأن الحلول الممكنة يمكن أن تكون نقطة واحدة فقط يمكنها أن ترضي كافة قيود المشكلة ، فهذا يعني أنه يوجد على الأقل حل واحد للمشكلة ويجب الاستمرار في إجراءات الحل حتى نتمكن من تحديد الحل الأمثل ، والرسم البياني رقم (1) يوضح هاتان الحالتان ، نعني حالة عدم وجود حل وحالة توفر حل للمشكلة.

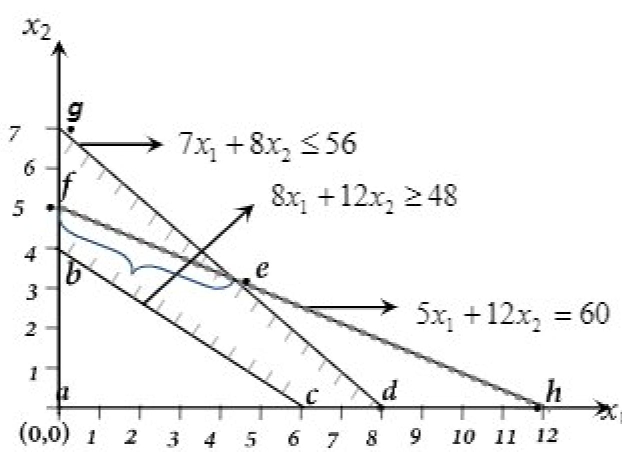


شكل (1) a يوضح مشكلة ليس لها حل

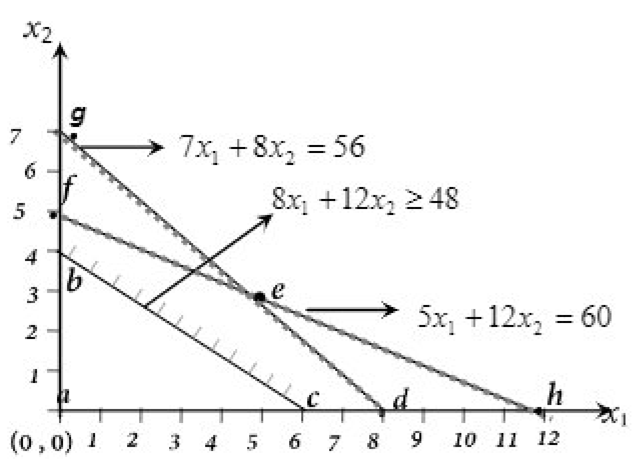


شكل (1) b يوضح منطقة حلول الممكنة (b,c,d,e,f) لمشكلة لها منطقة

والجدير بالذكر هنا أن الحلول الممكنة على الرسم البياني يمكن أن تكون على شكل منطقة وهي عبارة عن مساحة معينة على الرسم ترضي كافة القيود أو على شكل خط مستقيم وهي عبارة عن قطعة مستقيمة محصورة بين نقطتين على الرسم وهي ترضي كافة القيود ، ويمكن أن تكون على شكل نقطة معينة على الرسم وهذا يعني أن للمشكلة حل وحيد فقط وهو الحل الأمثل ، وهذا عكس الحالتين الأخيرتين (حلول على شكل منطقة وحلول على شكل قطعة مستقيمة) واللتان يعنيان وجود أكثر من حل للمشكلة ، والشكل البياني التالي (شكل 2) يوضح أنواع أشكال مناطق الحل .



الشكل (2) a الرسم البياني لمشكلة تظهر فيها لمنطقة حل على شكل قطعة (e ، f)

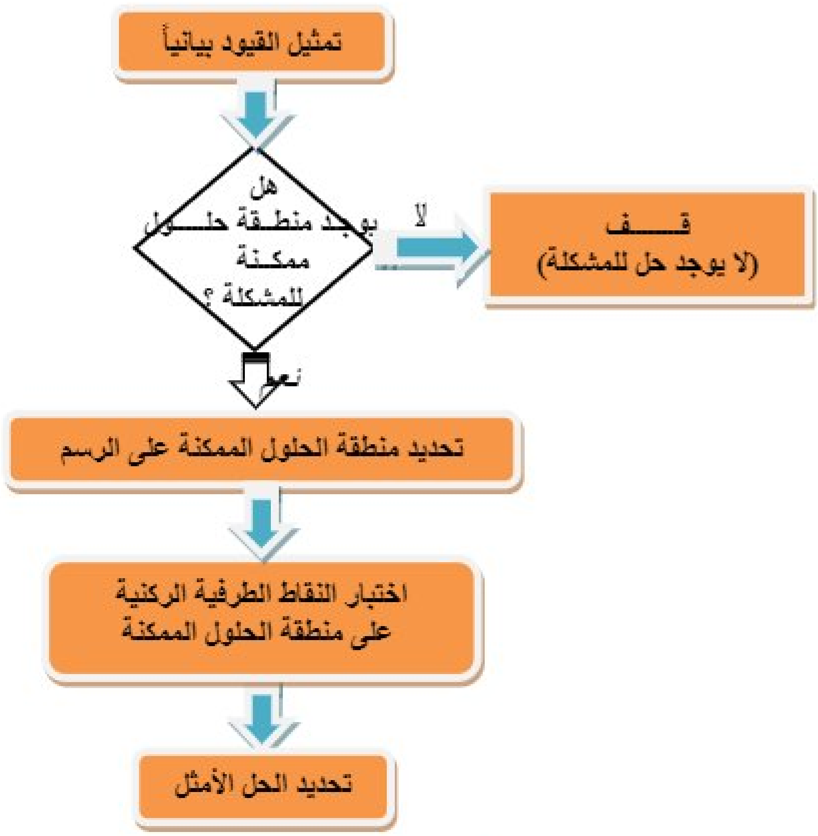


الشكل (2) b الرسم البياني لمشكلة لها عند النقطة حل وحيد (e)

وبهذا إذا لم تتوفر منطقة حلول ممكن يتم التوقف عن إجراءات الحل ، وفي حالة وجود منطقة حل يتم الانتقال للخطوة التالية .

iv) اختبار النقاط الركنية لمنطقة الحلول الممكنة التي تم تحديدها في الخطوة السابقة ، بهدف تحديد الحل الأمثل ، ويتم ذلك عن طريق التعويض عن قيم المتغيرات القرارية في دالة الهدف بإحداثيات النقاط الطرفية الركنية ، وتسجيل قيم دالة الهدف عند تلك النقاط الطرفية الركنية.

v) تحديد الحل الأمثل ، وتكون النقطة التي تحقق أعلى قيمة في دالة الهدف هي الحل الأمثل للمشكلة في حالة التعظيم ، وبذلك إحداثياتها هي قيم المتغيرات القرارية التي تحقق الحل الأمثل (أعلى قيمة) ، والنقطة الطرفية التي إحداثياتها تحقق أدنى قيمة تمثل الحل الأمثل في حالة التقليل . ويمكن تمثيل الخطوات السابقة في الرسم التخطيطي التالي (أنظر الشكل رقم 1)



شكل رقم (3) يوضح خطوات الحل بالطريقة البيانية

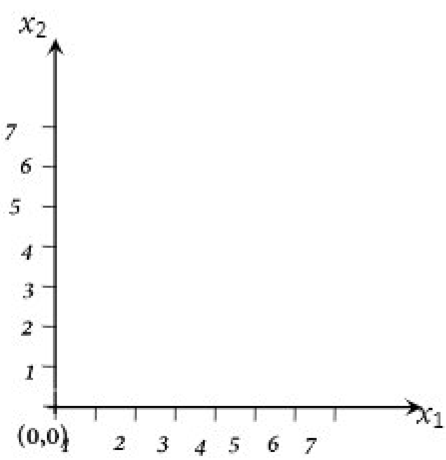
5–استخدام الطريقة البيانية في حل مشكلة برمجة خطية ذات ثلاثة متغيرات

كما سبق الذكر هنا نؤكد بأنه يمكن استخدام الطريقة البيانية في حلة مشكلة برمجة خطية ذات ثلاثة متغيرات ، وقد أثبت ذلك في عدة مراجع أجنبية ، إلا أن هذا لم يتجلى في كتبنا العربية ، عليه في هذه الورقة سنقوم بتوضيح ذلك ، وذلك عن طريق طرح مثال متنوع من حيث اختلاف علامات القيود $(\leq ، \geq ، =)$ ، بالإضافة إلى تنوعها من حيث عدد المتغيرات في كل قيد ، وذلك حتى نتمكن من توضيح آلية عمل الطريقة البيانية بشكل ، وحتى يزيد إدراكنا لعمل هذه الآلية سنقوم بتتبع خطوات الحل للطريقة

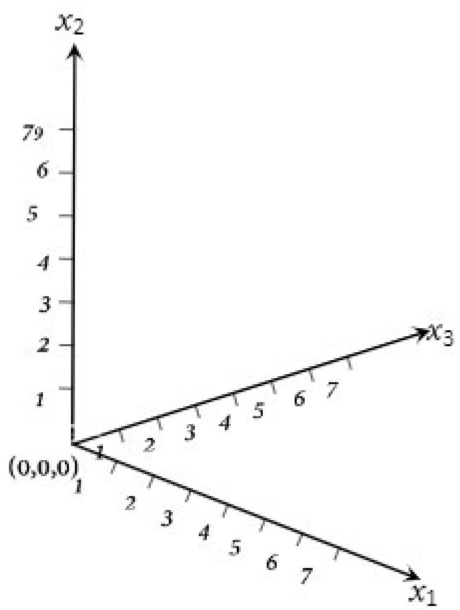
البيانية عن طريق حل ذات المثال باستخدام طريقة السمبلكس ، وفي هذا سيتم استخدام Linear and integer Programming (Version 1.00) والذي هو أحد برامج (WINQSB) المتخصص في حل نماذج بحوث العمليات ، إلا أنه قبل الخوض في غمار هذا المثال لابد من القيام بتمهيد لعملية الرسم بثلاثة أبعاد (متغيرات) .

1.6 تمهيد لعملية الرسم بثلاثة أبعاد (3D) :

إن عملية الرسم البياني لمشكلة ذات متغيرين تُعنى بالرسم البياني ذو أتجاهين (Two Deamination) ، لذلك يعبر عنها بيانياً بالمتجهين (X , Y) ، بذلك أي متباينة من الدرجة الأولى ولها متغيرين عند تمثيلها بيانيا ستظهر على الرسم على شكل مستوى (مساحة) تقاس بيانيا باتجاهين هما الطول والعرض كما هو موضح في الشكل البياني رقم (4) a ، أما بالنسبة لرسم متباينة من الدرجة الأولى ذات ثلاثة متغيرات فتعنى أن الرسم البياني ذو ثلاثة أبعاد (Three Deamination) ويعبر عنها بالمتجهات الثلاثة (X , Y , Z) ، وعند التمثيل البياني لمتباينات تتضمن ثلاثة متغيرات ستظهر على الرسم على شكل حجوم (مجسمات) تقاس بيانيا بثلاثة اتجاهات هي الطول والعرض والسماكة (العمق) ، كما هو موضح في الشكل البياني رقم (4) b .



الشكل رقم (4) a يوضح المحاور في حالة بعدين (2D)



الشكل (4) b يوضح المحاور ذات ثلاثة أبعاد (3D)

الجدير بالذكر هنا أن عملية الرسم بثلاثة أبعاد على درجة من التعقيد مقارنة بالرسم ذو البعدين، ونرى هنا ضرورة لعرض بعض الرسومات لبعض المتباينات بثلاثة أبعاد حتى يتمكن القارئ من تخيل الشكل النهائي لمنطقة الحلول الممكنة عند رسمها بثلاثة أبعاد.

إن مشاكل البرمجة ذات الثلاثة متغيرات قد تتنوع درجة تعقيدها بناء على تنوع قيود المشكلة ، فالقيود قد تتنوع من حيث عدد

المتغيرات التي يحتويها القيد ، كأن تحتوي على كل المتغيرات (ثلاثة) أو متغيرين أو متغير واحد ، وطبعاً عدد المتغيرات التي يحتويها لها تأثير جوهري على شكلها البياني ذو الثلاثة أبعاد كالتالي:

جدول رقم (1) يوضح تنوع المتباينات من حيث عدد المتغيرات

عدد المتغيرات التي يحتويها	القيد
ثلاثة متغيرات (x_1 , x_2 , x_3)	$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10$
متغيرين (x_1 , x_3)	$4x_1 + 2x_3 \geq 3$
متغير وحيد (x_2)	$x_2 \geq 2$

وقد تتنوع هذه القيود من حيث نوع الإشارة التي يحتويها القيد ، كأن تكون إشارة القيد علامة يساوي أو إشارة أكبر من أو يساوي أو علامة اصغر من أو يساوي ($\leq$ ، $\geq$ ، $=$) وهذا أيضاً له تأثير جوهري على الشكل البياني للقيد كالتالي:

جدول رقم (2) يوضح تنوع المتباينات من حيث نوع الإشارة

الإشارة التي يحتويها القيد	القيد
إشـــارة يســـاوي(=)	$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10$
إشارة أكبر من أو يساوي ($\geq$)	$4x_1 + 2x_3 \geq 3$
إشارة أصغر من أو يساوي ($\leq$)	$x_2 \leq 2$

وبذلك فالقيود قد تختلف من حيث عدد المتغيرات ومن حيث نوع الإشارة في ذات الوقت ، فمثلاً قد يكون القيد به ثلاثة متغيرات وإشارته علامة يساوي أو به ثلاثة متغيرات وإشارته أصغر من أو يساوي أو به متغير واحد وعلامته أكبر من أو يساوي ... الخ ، وسنستهل بتوضيحنا لكيفية رسم القيود بثلاثة أبعاد من القيود البسيطة إلى الأكثر تعقيداً ، وهي كالتالي:

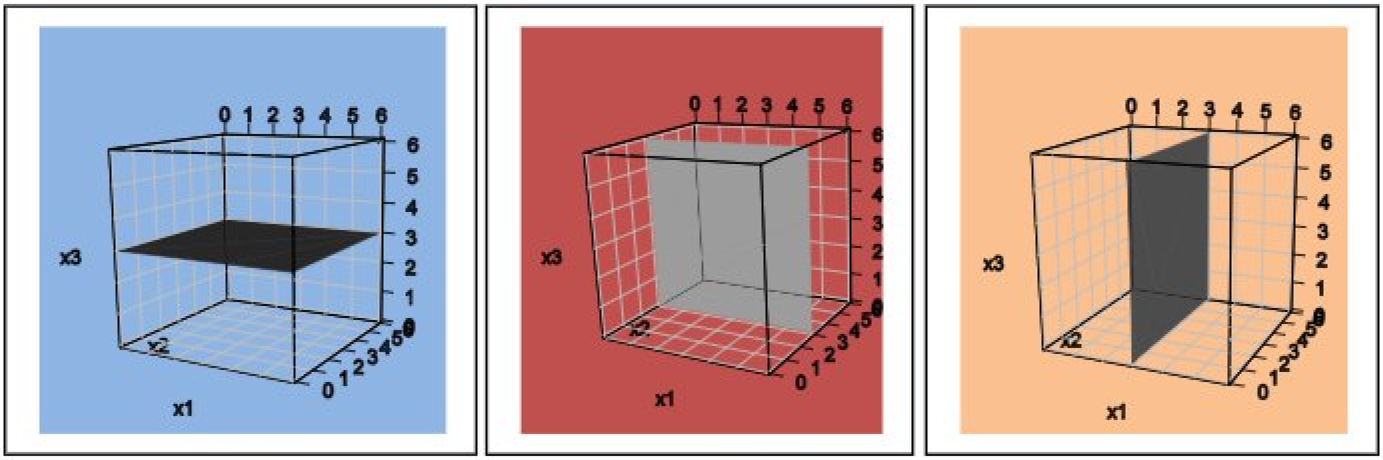
i) متباينة ذات متغير واحد فقط :

في مشاكل البرمجة الخطية ذات الثلاثة متغيرات ، عندما تكون إحدى المتباينات تحتوي على متغير واحد فقط فهذا يعني أن معامل باقي المتغيرات في هذه المتباينة يساوي صفر ، والشكل البياني لهذه المتباينة أو المعادلة يعتمد على نـــوع إشــــارة المتباينــــة ($\leq$ ، $\geq$ ، $=$) ، والآن سنعرض بشيء من التفصيل تأثير أنواع هذه الإشارات كالتالي:

a) في حالة علامة المتباينة يساوي (=):

نؤكد هنا بأنه إذا كانت المتباينة تحتوي على متغير واحد فقط وعلامتها (=) ، فإنه يمكن التعبير على منطقة الحلول الممكنة لهذه المتباينة على شكل مستوى (شريحة) ، لأن المتباينة بها متغير واحد فقط ، فإن هذه الشريحة ستكون عمودية على البعد (المحور)

الذي يمثله المتغير الذي تحتويه هذه المـعادلة هذه ، والشكل البياني رقم (5) يوضح ما تم توضيحه اعلاه ، فمثلاً الشكل (5) a منطقة الحلول الممكنة ($x_1 = 3$)، حيث يظهر الشكل البياني لمنطقة الحلول الممكنة على شكل شريحة عمودية على المحـــور (x_1) ، وفي الشكل (5) b عندما كانت المتباينة ($x_2 = 3$) كانت الشريحة عمودية على المحور (x_2) ، وفي الشكل (5) c تكون الشريحة عمودية على المحور الثالث (x_3) .

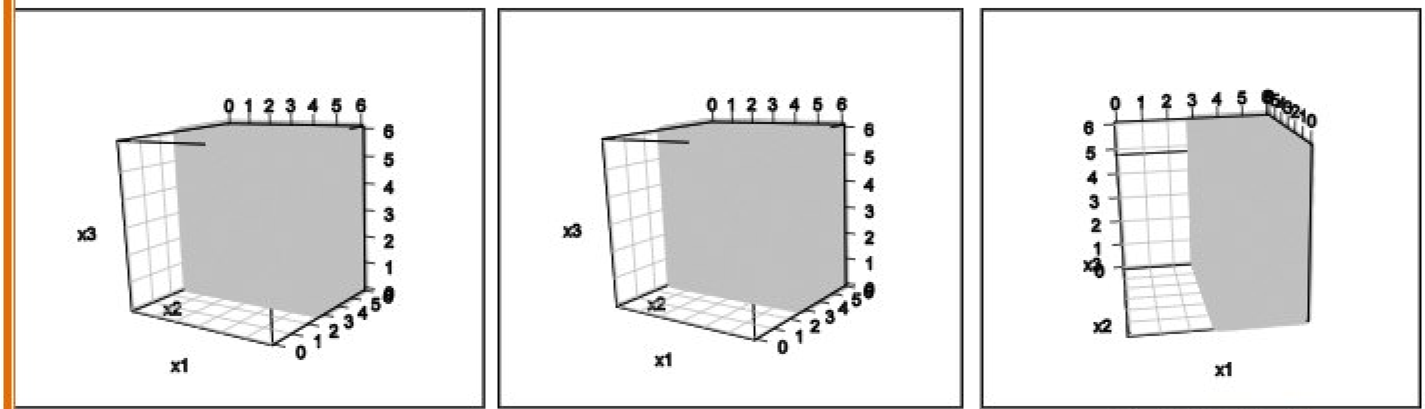


a) عندما $x_1 = 3$ b) عندما $x_2 = 3$ c) عندما $x_3 = 3$

شكل (5) الرسم البياني بلغة (R) لمعادلة تحتوي على متغير واحد

b) في حالة علامة المتباينة أكبر من أو يساوي ($\geq$):

إذا احتوت المتباينة متغير واحد فقط وكانت نوع إشارتها أكبر من أو يساوي ($\geq$) ، فإن الحلول الممكنة عبارة عن مستوى أو شريحة تكون عمودية على المحور الذي يمثل المتغير الموجود في المتباينة (كما تم التوضيح في الشكل السابق شكل 5) ، بالإضافة إلى كل المساحة التي تعلو تلك الشريحة ، وبهذا تكون الحلول الممكنة عن حجم على شكل متوازي مستطيلات (أو مكعب في بعض الحالات الخاصة) ، ويكون متوازي المستطيلات هذا في وضع عمودي مع المحور الذي يمثل المتغير الذي تحتويه المتباينة ، ويتجلى هذا في الشكل البياني التالي ، فمثلاً الشكل (6) a يوضح الحلول الممكنة عندما ($x_1 \geq 3$)، وهو عبارة عن متوازي المستطيلات ، حيث إحدى قوائمه عمودي على المحور (x_1) والقائمين الآخرين يوازي أحدهم المحور (x_2) والآخر يوازي المحور (x_3) ، وهذا التحليل ينطبق على الشكل (6) b عندما كانت المتباينة ($x_2 \geq 3$) حيث يكون متوازي المستطيلات عمودياً على المحور (x_2) ويوازي المحورين الآخرين ، وفي الشكل (6) c يكون عمودياً على المحور الثالث (x_3) ويوازي المحورين الآخرين.

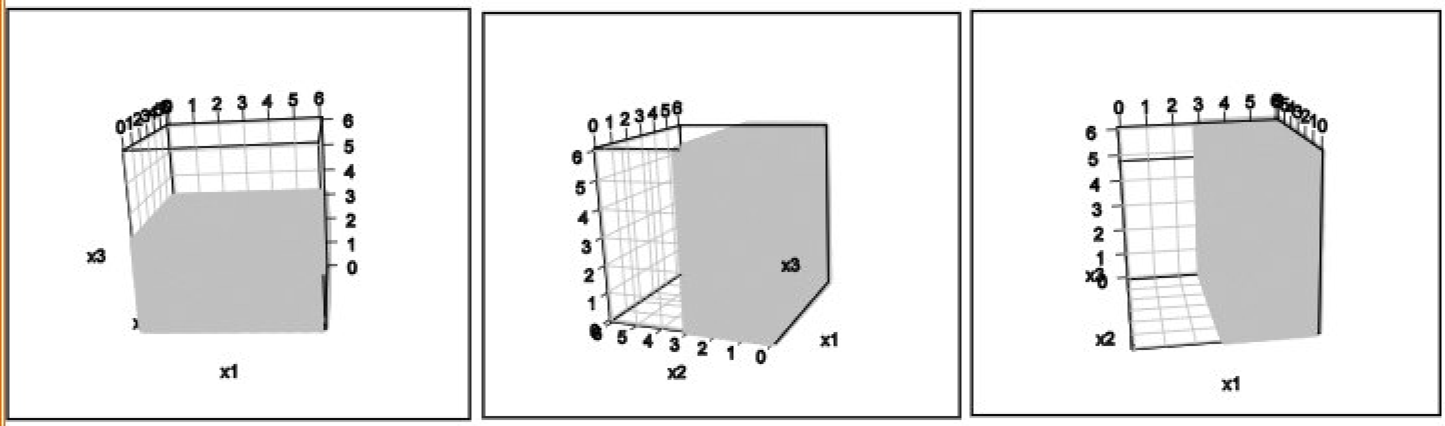


(a) عندما $x_1 \geq 3$ (b) عندما $x_2 \geq 3$ (c) عندما $x_3 \geq 3$

شكل (6) الرسم البياني بلغة (R) لمتباينة تحتوي على متغير واحد وعلاماتها ($\geq$)

c) في حالة علامة المتباينة أصغر من أو يساوي ($\leq$):

ما ذكر في الحالة السابقة (متغير واحد مع إشارة أكبر من) ينطبق تماماً على هذه الحالة (متغير واحد مع إشارة أصغر من) ، مع وجود استثناء وحيد ، وهو على العكس تماماً على ما ذكر أعلاه ، حيث إن منطقة الحلول الممكنة تكون على الشريحة العمودية كل المساحة التي تدنوها وليس التي تعلوها كما كان في حالة ما تحتوي المتباينة على إشارة أكبر من أو يساوي ، والشكل (7) a والشكل (7) b والشكل (7) c يوضح الحلول الممكنة وهي على شكـل متوازي المستطيـلات للمتباينات عنـدما ($x_1 \leq 3$)، ($x_2 \leq 3$) ، ($x_3 \leq 3$) على التوالي .



a) عندما ($x_1 \leq 3$) b) عندما ($x_2 \leq 3$) c) عندما ($x_3 \leq 3$)

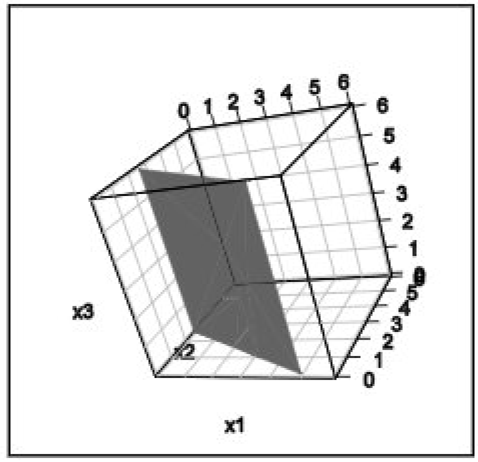
شكل (7) الرسم البياني بلغة (R) لمتباينة تحتوي على متغير واحد وعلامتها ($\leq$)

ii) متباينة ذات متغيرين :

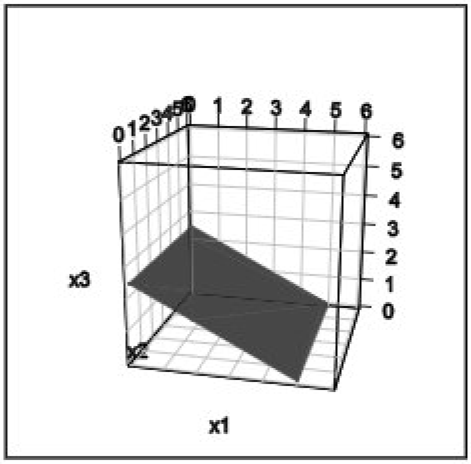
في مشاكل البرمجة الخطية ذات الثلاثة متغيرات ، عندما تكون إحدى المتباينات تحتوي على متغيرين ، فهذا يعني أن معامل المتغير الثالث لهذه المتباينة يساوي صفر ، وبالتالي الشكل البياني لنقاط الحل لهذه المتباينة أو المعادلة يعتمد على نوع إشارة المتباينة ($\leq$ ، $\geq$ ، $=$) ، والأن سيتم عرض تأثير أنواع هذه الإشارات كالتالي:

a) في حالة علامة المتباينة يساوي (=):

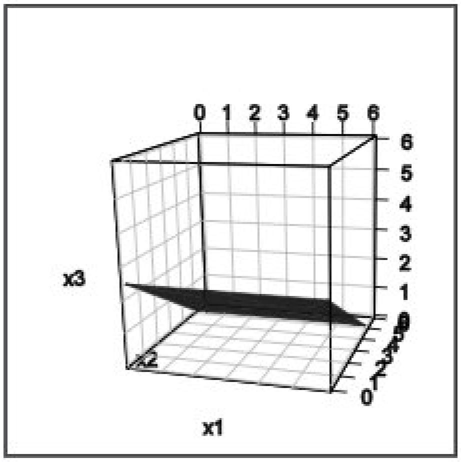
بناءً على ما ذكر أعلاه وتحديداً في النقطة (i) في الفقرة (a) ، فإن الشكل البياني لمعادلة (تحمل علامة (=)) عبارة عن مستوى (شريحة) ، وهي بشكل مائل الرسم حيث يرتكز طرفاها على المحورين اللذان يمثلهما المتغيرين الموجودين في المتباينة ، وفي ذات الوقت يوازي سطح الشريحة المحور الثالث ، كما يظهر في الشكل رقم (8).



(a) عندما $2x_1 + 4x_2 = 12$



(b) عندما $2x_1 + 4x_3 = 12$



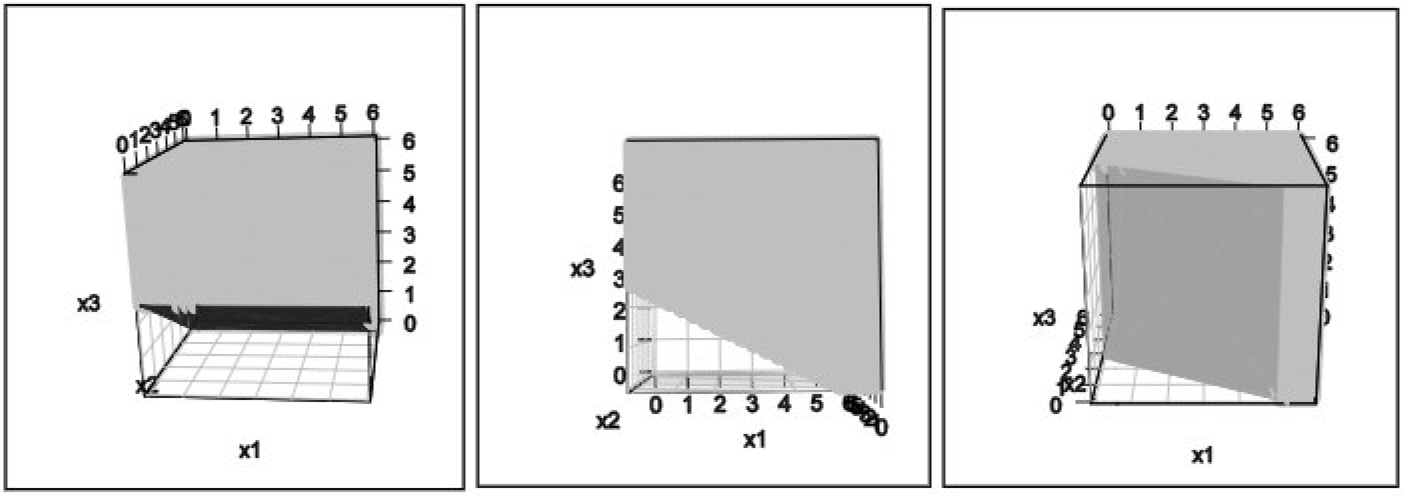
(c) عندما $2x_2 + 4x_3 = 12$

شكل (8) الرسم البياني بلغة (R) لمعادلة تحتوي على متغيرين

بناءً على ما ذكر أعلاه نلاحظ في الشكل (8 a عندما المعادلة $(2x_1 + 4x_2 = 12)$ أن منطقة الحل تظهر على شكل شريحة ترتكز عدد (2) من زواياها على المحور (x_1)، والزاويتان الآخريان ترتكزان على المحور (x_2)، وبشكل عام فإن الشريحة توازي المحور الثالث (x_3) ، وبنفس المنطق يمكن تفسير الشكل البياني للمعادلة $(2x_1 + 4x_3 = 12)$ ، والتي تظهر في الشكل (8 b ، فهنا ترتكز الشريحة على المحورين (x_3)، (x_1) وهي توازي المحور الذي يمثل المتغير (x_2)، أما في الشكل (8 c ، فإن الشريحة ترتكز على المحورين (x_3)، (x_2) وهي توازي المحور الذي يمثل المتغير (x_1).

b) في حالة علامة المتباينة أكبر من أو يساوي ($\geq$):

الحلول الممكنة في هذه الحالة عبارة عن مستوى أو شريحة معينة ، بالإضافة إلى كل المساحة التي تعلو هذه الشريحة ، إلا أن هذه الشريحة ترتكز زواياها على المحورين اللذان يمثلان المتغيرات الموجودة بالمتباينة ، وفي ذات الوقت توازي المحور الآخر ، بمعنى آخر الحلول الممكنة هنا تظهر على شكل متوازي مستطيلات يكون وضعه مائلاً بالنسبة للمحورين اللذان يمثلان المتغيرات الموجودة في المعادلة وموازي للمحور الثالث ، فمثلاً في الشكل (9 a متوازي المستطيلات يرتكز على المحور (x_2)، (x_1) ، ويوازي المحور (x_3) ، وهذا ينطبق على الشكل (9 b حيث يكون متوازي المستطيلات يرتكز بشكل مائل على المحورين (x_3)، (x_1) ويوازي المحور (x_2)، ويمكن تطبيق هذا المنطق على الشكل (9 c أيضاً.

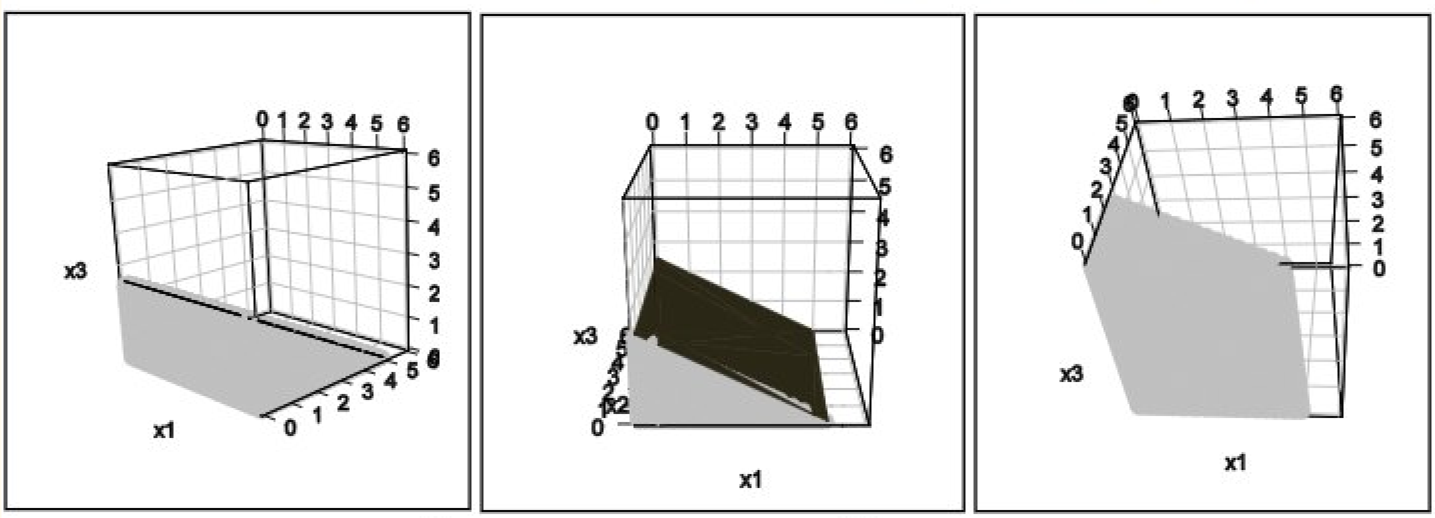


(a) عندما $2x_1 + 4x_2 \geq 12$ (b) عندما $2x_1 + 4x_3 \geq 12$ (c) عندما $2x_2 + 4x_3 \geq 12$

شكل (9) الرسم البياني بلغة (R) لمتباينة تحتوي على متغيرين وعلاماتها ($\geq$)

d) في حالة علامة المتباينة أصغر من أو يساوي ($\leq$):

إن التحليل الذي ذكر أعلاه في النقطة (i) في الفقرة (b) ينطبق تماماً على هذه الحالة باستثناء أن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المحددة بمنطقة على شكل شريحة ومتوازي المستطيلات الذي يدنو هذه الشريحة ، وليس في متوازي المستطيلات الذي يعلوها كما ذكر أعلاه ، وهذا يظهر كما في الشكل رقم (10).



(a) $2x_1 + 4x_2 \leq 12$ (b) $2x_1 + 4x_3 \leq 12$ (c) $2x_2 + 4x_3 \leq 12$

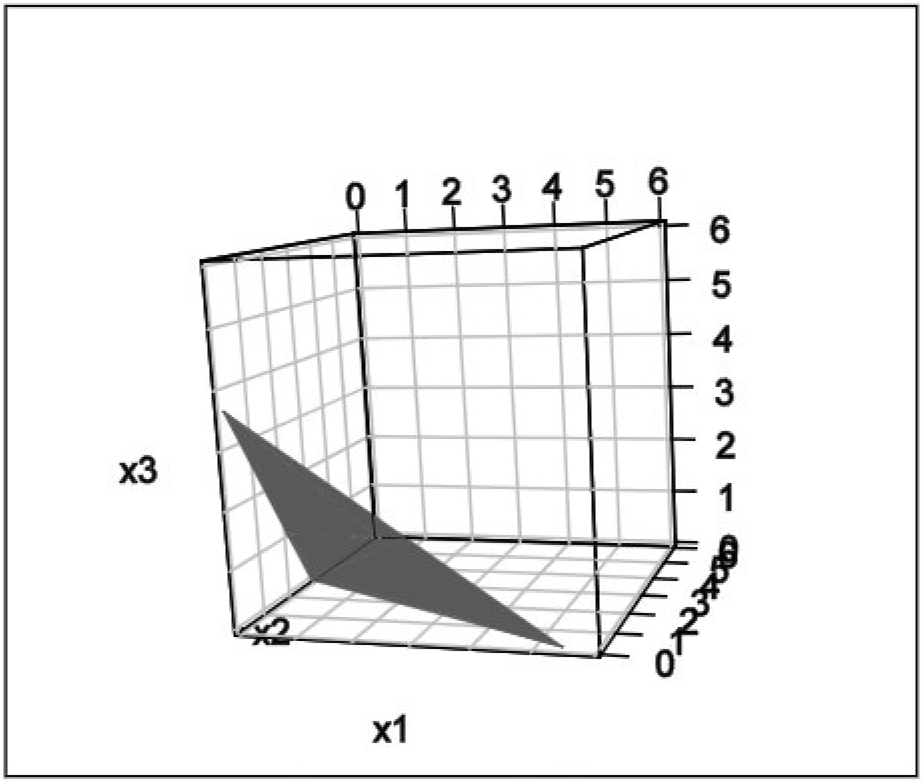
شكل (10) الرسم البياني بلغة (R) لمتباينة تحتوي على متغيرين وعلاماتها ($\leq$)

iii) متباينة ذات ثلاثة متغيرات :

يمكن أن تحتوي المتباينة على الثلاثة متغيرات (x_1 , x_2 , x_3) ، وفي ذات الوقـــت يمكن أن تكون هذه المتباينة تحمل علامة ($\leq$ ، $\geq$ ، $=$) وسيختلف شكلها البياني بناءً على نوع الإشارة كالتالي:

a) في حالة علامة المتباينة يساوي (=):

إذا كانت المتباينة تحتوي على ثلاثة متغيرات وعلامتها (=) ، فهذا يعني أن منطقة الحلول الممكنة لهذه المعادلة عبارة عن مستوى أو شريحة على شكل مثلث وكل رأس من رؤوسه يتمركز على محور معين ، وبهذا لا تكون هذا الشريحة موازية لأي محور من المحاور الثلاثة ، وهذا يتجلى في الشكل البياني رقم (11) .



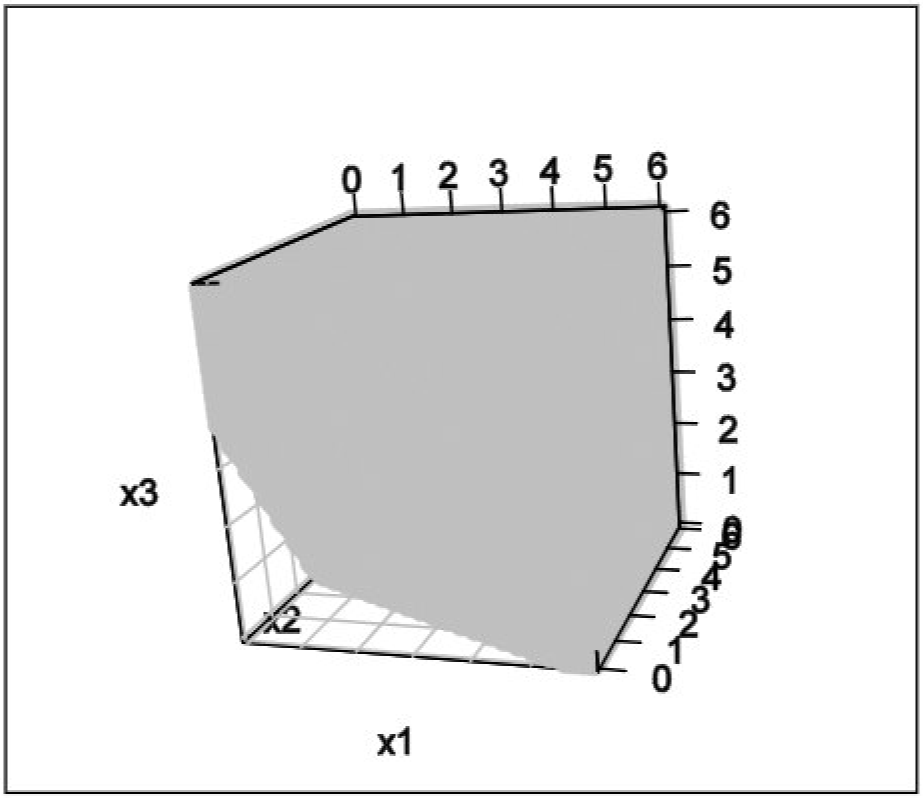
شكل (11) الرسم البياني بلغة (R) لمعادلة

تحتوي على ثلاثة متغيرات ($2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 24$)

b) في حالة علامة المتباينة أكبر من أو يساوي ($\geq$):

إن الحلول الممكنة لهذه الحالة تنحصر في شكل حجم ذو ثلاثة أبعاد ، وهو عبارة عن شريحة بنفس الشكل والوضع الذي ذكر أعلاه وكل المنطقة التي تعلو هذه الشريحة ، وبذلك تكون الشريحة هي السطح السفلي لهذا الحجم ، والشكل البياني رقم (12)

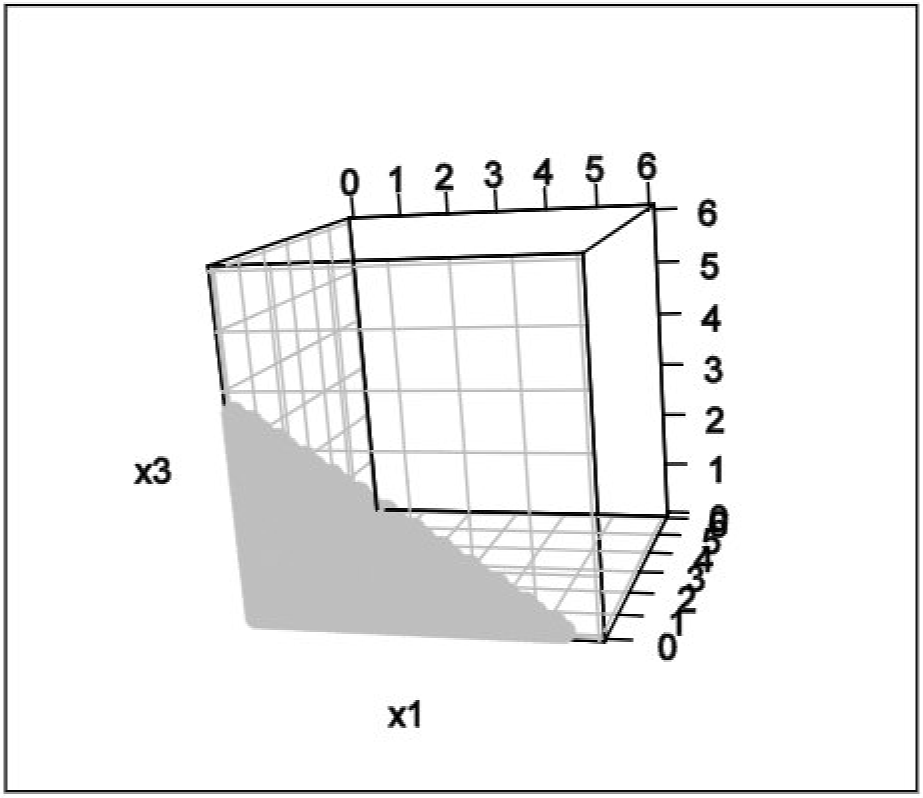
يمثل الشكل البياني للمتباينة $(2x_1+4x_2+3x_3\geq 24)$، والشكل البياني أدناه يوضح الحلول الممكنة لهذه المتباينة ، إلا أن كل شكل يوضح شكل المتباينة من جانب معين .



شكل (12) الرسم البياني بلغة (R) لمتباينة ذات ثلاثة متغيرات
وعلامة أكبر من أو يساوي ($2x_1+4x_2+3x_3\geq 24$)

c) في حالة علامة المتباينة أصغر من أو يساوي ($\leq$):

إن التحليل المذكور في النقطة السابقة ينطبق على الحلول الممكنة لهذه الحالة إلا أن الشريحة تعتبر السطح العلوي للحجم المحدد للحلول الممكنة ، وبهذا تكون الشريحة والمنطقة التي تدنوها هي الحجم المحدد لمنطقة الحلول الممكنة لهذا النوع من المتباينات ، والشكل البياني رقم (13) يمثل الشكل البياني للمتباينة $(2x_1+4x_2+3x_3\leq 24)$، والرسوم البياني أدناه توضح الوصف المذكور أعلاه ، إلا أن كل شكل يوضح شكل المتباينة من جانب معين .



شكل (13) الرسم البياني بلغة (R) لمتباينة ذات ثلاثة متغيرات

وعلامة أصغر من أو يساوي ($2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 24$)

2.6 استخدام الطريقة البيانية في حل مشكلة بها ثلاثة متغيرات :

بعد التمهيد السابق لكيفية استخدام الطريقة البيانية في مشكلة بها ثلاثة متغيرات ، نقوم بحل النموذج التالي بيانياً ، طبعاً تعمدنا التنوع في شكل القيود من حيث اختلاف المتباينات وعدد المتغيرات الداخلة في كل متباينة ، وذلك حتى نتمكن من توضيح كافة الصعوبات التي يمكن أن تعترض عملية الحل ، والنموذج هو كالتالي:

$$Max\ z = 5x_1 + 6x_2 + 5x_3$$

ST:

$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \le 36$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 24$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 24$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \ge 0$$

في البداية ستقوم بحل هذا النموذج الرياضي السابق وفقاً لطريقة السمبلكس ، وفي ذلك سوف نستخدم Linear and integer Programming (Version 1.00) والذي هو أحد برامج (WINQSB) المتخصص في حل نماذج بحوث العمليات ، ثم تتبع هذا الحل باستخدام الطريقة البيانية ذات الثلاثة أبعاد ، وذلك بهدف توضيح النقاط الطرفية لمنطقة الحلول الممكنة التي تم المرور عليها عند استخدام طريقة السمبلكس .

استخدام طريقة السمبلكس :

إن طريقة السمبلكس بالنسبة للطريقة البيانية عبارة عن عملية اختيار للنقاط الطرفية الركنية لمنطقة الحلول الممكنة ، وذلك عن طريق التحرك على هذه النقاط ومن ثم التوقف عند النقطة التي تمثل الحل الأمثل ، يتم ذلك عبر إعداد جداول (Tableaus) متسلسلة ، حيث يمثل كل جدول حلاً عند نقطة طرفية معينة ، وهي كالتالي:

1) إعداد الجدول المبدئي :

جدول رقم (3) الجدول المبدئي باستخدام برنامج WINQSB

		X1	X2	X3	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3		
Basis	C(j)	5.0000	6.0000	5.0000	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Slack_C1	0	4.0000	6.0000	3.0000	1.0000	0	0	36.0000	6.0000
Slack_C2	0	1.0000	3.0000	3.0000	0	1.0000	0	24.0000	8.0000
Slack_C3	0	3.0000	2.0000	2.0000	0	0	1.0000	24.0000	12.0000
	C(j)-Z(j)	5.0000	6.0000	5.0000	0	0	0	0	

إن الجدول المبدئي (3) يمثل الحل عند نقطة الأصل (0 ، 0 ، 0) ، والمتغيرات الداخلة في الحل هي المتغيرات الراكدة الموجودة تحت العمود (Basis) وقيمتها محددة تحت العمود (R. H. S.) وهي كالتالي:

Slack_C1 = 36

Slack_C2 = 24

Slack_C3 = 24

في حين أن المتغيرات القرارية (x_1 , x_2 , x_3) لم تدخل في هذا الحل (لا توجد في العمود (Basis)) لذلك فإن قيمها تساوي أصفار (x_1 ، x_2 ، x_3= 0) . وبناءً على ما سبق فإن قيمة دالة الهدف عند هذا الجدول والذي يمثل الحل عند نقطة الأصل تساوي الصفر ،كما يظهر هذا في العمود (R. H. S.) وتحديداً في الخلية المناظرة للصف ((C(j) – Z(j)).

2) إعـــــداد الجدول الثاني :

جدول رقم (4) الجدول الثاني باستخدام برنامج WINQSB

		X1	X2	X3	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3		
Basis	C(j)	5.0000	6.0000	5.0000	0	0	0	R. H. S.	Ratio
X2	6.0000	0.6667	1.0000	0.5000	0.1667	0	0	6.0000	12.0000
Slack_C2	0	-1.0000	0	1.5000	-0.5000	1.0000	0	6.0000	4.0000
Slack_C3	0	1.6667	0	1.0000	-0.3333	0	1.0000	12.0000	12.0000
	C(j)-Z(j)	1.0000	0	2.0000	-1.0000	0	0	36.0000	

في هذا الجدول تم إدخال المتغير (x_2) بمقدار (6) وحدات ، ليحل محل المتغير (Slack_C1) ، وبهذا تكون قيم المتغيرات الأساسية الداخلة في هذا الحل (المتغيرات الموجودة في العمود Basis) كالتالي:

$x_2 = 6$

Slack_C2 = 6

Slack_C3 = 12

بناءً على ما سبق فإن قيمة دالة الهدف عند هذا الجدول والذي يمثل الحل عند النقطة (a) والتي قيم إحداثياتها (0 ، 6 ، 0) وقيمة دالة الهدف عند هذه النقطة تساوي 36 ، كما يظهر هذا في العمود (R. H. S.) وتحديداً في الخليـــة المناظـــرة للصــف (C(j) – Z(j)) ، كما يلاحظ إن هذا الحـل غير أمثل ، لوجود قيمة موجبة في الصف (C(j) – Z(j)) ، وتحديداً في الخلية المقابلة للعمود x_3 ، x_1 وهي (2 ، 1) على التوالي ، وعليه سيكون العمود الأمثل لهذا الجدول هو العمود x_3 ، والصف المستبدل هو الصف المناظر للصف Slack_C2 . وعليه في الجدول التالي سيخرج المتغير Slack_C2 ليحل محله المتغير x_3 .

3) إعداد الجدول الثالث :

جدول رقم (5) الجدول الثالث باستخدام برنامج WINQSB

		X1	X2	X3	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3		
Basis	C(j)	5.0000	6.0000	5.0000	0	0	0	R. H. S.	Ratio
X2	6.0000	1.0000	1.0000	0	0.3333	-0.3333	0	4.0000	4.0000
X3	5.0000	-0.6667	0	1.0000	-0.3333	0.6667	0	4.0000	M
Slack_C3	0	2.3333	0	0	0	-0.6667	1.0000	8.0000	3.4286
	C(j)-Z(j)	2.3333	0	0	-0.3333	-1.3333	0	44.0000	

هنا سيتم إدخال المتغير (x_1) ليحل محل المتغير (Slack_C3) ، وبهذا تكون قيم المتغيرات الأساسية الداخلة في هذا الحل (المتغيرات الموجودة في العمود Basis) كالتالي:

$x_2 = 4$

$x_3 = 4$

Slack_C3 = 8

إن هذا الجدول يمثل الحل عند النقطة (b) ، والتي قيم إحداثياته (4 ، 4 ، 0) وقيمة دالة الهدف عند هذه النقطة تساوي 44 .

بالنظر إلى الجدول أعلاه نلاحظ وجود قيمة موجبة (2.333) في الصف ((C(j) – Z(j)) وتحديداً في الخلية المقابلة للعمود (x_1) ، وهذ يعني أن هذا الحل غير أمثل أيضاً ، وعليه سيكون العمود (x_1) هو العمود الأمثل ، والصف المستبدل هو الصف المناظر للمتغير (Slack_C3).

4) إعداد الجدول الرابع :

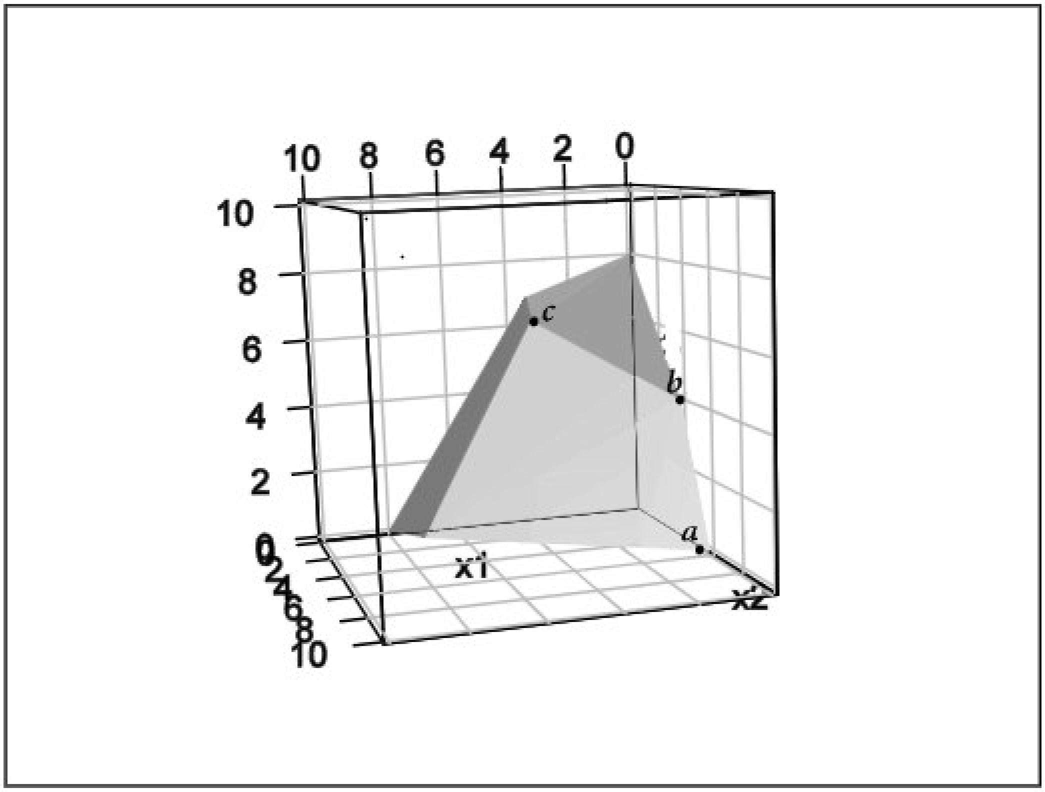
جدول رقم (6) الجدول الرابع باستخدام برنامج WINQSB

		X1	X2	X3	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3		
Basis	C(j)	5.0000	6.0000	5.0000	0	0	0	R. H. S.	Ratio
X2	6.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.3333	-0.0476	-0.4286	0.5714	
X3	5.0000	0.0000	0.0000	1.0000	-0.3333	0.4762	0.2857	6.2857	
X1	5.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0	-0.2857	0.4286	3.4286	
	C(j)-Z(j)	0	0	0	-0.3333	-0.6667	-1.0000	52.0000	

إن وهذا الجدول يمثل الحل عند النقطة (c) ، والتي قيم إحداثياتها (6.2857 ، 0.5714 ، 3.4286) وقيمتها في دالة الهدف تساوي 52 . إن هذا الحل يعتبر الحل الأمثل للمشكلةُ ، لعدم وجود قيم موجبة في صف صافي التغير ((C(j) – Z(j)) ، وبمعنى آخر إن كل قيم هذا الصف قيم سالبة ، وقيمة دالة الهدف عنده هي الأعلى وتساوي 52 .

ii) استخدام الطريقة البيانية:

هنا سيتم استخدام لغة البرمجة ((R Core Team (2013) في رسم النموذج السابق ، تظهر منطقة الحلول الممكنة على شكل مجسم تظهر أبعاده في الشكل البياني رقم (14) ، وبناءً على حل النمـــوذج بطريقة السمبلكس ، فإن النـــقاط التي تحركت عليها طريقة السمبلكس هي النقـــطة (a) والتي إحـــداثياتها (0 ، 6 ، 0) ، ثم تم الانتـــقال للنقطة (b) والتي إحـــداثياتهـــا (4 ، 4 ، 0) ، وأخيـــراً النقطـــة (c) والتـــي إحـــداثياتها (6.2857 ، 0.5714 ، 3.4286) ، وهي الحل الأمثل وتحقق عائداً وقدره 52.



شكل (14) الرسم البياني بلغة (R) لمنطقة الحلول الممكنة ذات الثلاثة أبعاد

7 - الخلاصة Conclusion

في هذه الورقة تم دراسة الطريقة البيانية التي تعتبر إحدى الطرق الرئيسية المستخدمة في حل مشاكل البرمجة الخطية ، بهدف الوقوف على قدرتها في حل مشـاكل البرمجة الخطية ذات ثلاثة متغيرات ، في حالة تنوع القيود المحددة للمشكلة من حيث عدد المتغيرات وإشارات المتباينات ، إن هذا يتطلب استخدام الرسم البياني ذو الثلاثة أبعـاد (3 D) ، حتى يتم تحديد منطقة الحلول الممكنة ، التي تظهر على شكل مجسم ، ثم يتم تحديد نقاطها الطرفية التي يتم اختبارها عن طريق التعويض عن قيم إحداثياتها في دالة الهدف بهدف تحديد أفضلها (الحل الأمثل) . إن الرسم البياني لمشكلة بها ثلاثة متغيرات على درجة من التعقيد مقارنةً بالرسم في حالة متغيرين (2 D) ، لذلك قمنا باستخدام لغة في التحليلات الإحصائية ((R Core Team (2013) في رسم مشكلة برمجة خطية ، والتي كانت قيود (المعادلات والمتباينات) متنوعة لتظهر على شكل (3 D) ، وتم تحديد منطقة الحلول الممكنة ونقاطها الطرفية ، والتي من بينها تم اختيار الحل الأمثل ، وفي نهاية هذه الورقة قمنا بتتبع هذا العمل باستخدام طريقة السمبلكس حتى نضمن صحة هذا الإجراء ، وفعلا أثبتت طريقة السمبلكس صحة النتائج التي تم الوصول إليها ، وبهذا نؤكد إمكانية استخدام

الطريقة البيانية في حل مشاكل البرمجة الخطية التي تحتوي على ثلاثة متغيرات ، إلا أنه هناك صعوبة في تحقيق ذلك مقارنةً في حالة وجود متغيرين فقط (الرسم بـ 2D) ، ونجد ضرورة لاستخدام الحاسوب للقيام بعملية الرسم بـ(3 D) .

المراجع :

اولاً: المراجع العربية :

1. الجنابي، محمود حسين ،(2010). الأحدث في بحوث العمليات، دار حامد الأردن.
2. الجواد، دلال، الفتال، صادق ،(2008). بحوث العمليات، دار اليازوري، عمان .
3. الشيخ، أبو القاسم حسن ،(2009). بحوث العمليات. المجموعة للنشر والتوزيع.
4. الصفدي، محمد سالم ،(1999). بحوث العمليات تطبيق وخوارزميات، دار وائل للنشر العربية، عمان.
5. الكبيسي، موفق، (1999). بحوث العمليات، دار حامد، الأردن.
6. المنصوري، محمود محمد ، (1996). أساليب بحوث العمليات واستخداماتها في ترشيد
7. العتوم، شفيق ،(2005) . بحوث العمليات، دار المناهج عمان.
8. الفضل، مؤيد، (2010). المنهج الكمي في اتخاذ القرارات المثلي، اليازوري العلمية للنشر والتوزيع عمان.
9. الفياض، محمود، قدادة، عيسي، (2007). بحوث العمليات، دار اليازوري، عمان.
10. عملية اتخاذ القرار، منشورات مركز البحوث للعلوم الاقتصادية بنغازي
11. الموسوي، عبد الرسول عبد الرازق ، (2009) . المدخل الي بحوث العمليات، دار وائل، عمان.
12. النعيمي، محمد عبد العال، الحمداني، رفاه شهاب، الحمداني، احمد شهاب (2011) . بحوث العمليات، ط2 دار وائل للنشر والتوزيع.
13. حمدان، فتحي خليل،(2010) . بحوث عمليات مع تطبيقات باستخدام الحاسوب، دار وائل، عمان.
14. صبري، عزام ،(2003). أساسيات في بحوث العمليات. عالم الكتب الحديث الأردن .
15. طعمة، حسين ياسين، البنور، مروان حسين، حنوس، ايمان حسين،(2009). بحوث العمليات نماذج وتطبيقات ، دار الصفاء، عمان.
16. عبيدات، سليمان خالد ،(2015). الأساليب الكمية في الإدارة ، دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان.
17. علي، حسين، الفضل، مؤيد، إبراهيم، نجاح ، (1999). بحوث العمليات وتطبيقاتها في وظائف المنشاة، دار زهران عمان.
18. فرحات، حيدر محمد، عواد، محمد سليمان ، (1998) . بحوث العمليات النظرية والتطبيق، دار الفكر ، عمان.
19. كعبور، محمد محمد ،(1992). أساسيات بحوث العمليات ،كلية المحاسبة، غريان.
20. مرجان، سليمان محمد ،(2002). بحوث العمليات ، دار الكتب الوطنية بنغازي، ليبيا.

ثانياً المراجع الاجنبية:

1. Chhajed, D., Francis, R. L., and Lowe, T. J., 1993, "Contributions of Operations Research to Location Analysis", Location Science, 1, 263-287.

2. Coyle, J. J, Bardi, E. J, and Langley, Jr, C. J., The Management of Business Logistics, west publishing company, New York , 1988.
3. Daskin, M., Network and Discrete Location: Models, Algorithms and Applications, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998.
4. Drezner, Z., and Hamacher, H., *Facility location: applications and theory,* Springer, New York, 2001
5. Elshaikh, A., 2014, " Adaptive Heuristic Methods for the Continuous *p*-Centre Location Problems ", *PhD Thesis,* Kent Business School, University of Kent, UK.
6. FREDERICK S. HILLIER, GERALD J. LIEBERMAN.2000. Introduction to Operations Research Education 7th ed. McGraw-Hill Higher Education, New York.
7. Hamdy A.Taha.2007. Operations Research AN Introduction 8th ed.Pearson prentice hell , New Jersey.
8. JURAJ STACHO. 2014. Introduction to Operations Research Deterministic Models7th ed , Columbia University. , New York.
9. Luis, M., 2008, " Metaheuritics for the Capacitated Multi-source Weber Problem", *PhD Thesis,* Kent Business School, University of Kent, UK.
10. Rama Murthy STACHO . 2007. Operations Research, 2th ed. New AGE international , New Delhi.
11. Reeves, C., Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems, Blackwell, Oxford, 1993.
12. Reeb, J., and Leavengood, S., October 1998, " Using the Graphical Method to Solve Linear Programs", Performance Excellence in the Wood Products Industry: Operations Research, 1-28.
13. Salhi, S., 2006, "Heuristic Search In Action: The Science of Tomorrow", Paper presented at OR 48 Conference, University of Bath, Bath, UK.
14. Shapiro, R., and Heskett, J., Logistics Strategy, Cases and concepts , West Publishing Co., New York, 1985.
15. http://www.R-project.org/. PM10:00-2017/9/8
16. https://people.richland.edu/james/ictcm/2006/3dsimplex.html PM10:05-2017/9/8