الجبر الخطي

د. مصباح مفتاح العروي

د. أحمد حسان الغصين

جامعة التحدي - سرت

الجبر الخطي

الجبـر الخطـي

د. مصباح مفتاح العروي   د. أحمد حسان الغصين

جامعة التحدي
سرت- الجماهيرية العظمى.

الطبعة الأولى:2002

الوكالة الليبية للترقيم الدولي الموحد للكتاب

دار الكتب الوطنية، بنغازي – ليبيا.

: 9090509 – 9096379 – 9097074 🖷: 9096380

ردمـــــك: 1-13-805-9959

رقم الإيداع: 4117

جامعة التحدي – سرت– الجماهيرية العظمى.

: 62694 – 68240 🖷: 62152- 54- 00218

Email: tahdi51 @ hotmail.com

مُقَدِّمَة

الجبر فرع من فرع الرياضيات البحتة، يلعب دوراً رئيسياً في عملية تطوير الرياضيات، ويسهم مساهمة فعالة في حل المسائل المطروحة على إنسان هذا العصر في ميادين شتى، كالاقتصاد والفيزياء والتخطيط والبرمجة والأقمار الاصطناعية والاتصالات عبر الألياف البصرية، لذا كان واجباً حتمياً على الطالب الجامعي في الفروع العلمية أن يتعرف على المفاهيم الجبرية المختلفة وأن يدرس البعض منها، وأن يتابع القراءة العلمية على عتبة البحث العلمي مسهماً في تقدم جيله ومسايراً لركب التطور العلمي.

يتضمن هذا الكتاب الفصول التالية:

الفصل الأول: يدرس المصفوفات والمحددات (تعريفها، أنواعها، العمليات عليها، خواصها، وطرق حساب المحددات) والمبرهنات المتعلقة بالمصفوفات والمحددات.

وفي **الفصل الثاني:** تم دراسة المعادلات الخطية المتجانسة والفضاءات المتجهة الجزئية والارتباط، الاستقلال الخطي للمتجهات، عدد أبعاد فضاء متجهي، رتبة مصفوفة وعلاقتها بالاستقلال والارتباط الخطي.

أما **الفصل الرابع:** فقد خصص لدراسة التحويلات (التطبيقات) الخطية وخواصها وأثر تغيير القاعدة على مصفوفة تطبيق خطي، القيم الذاتية والفضاءات الذاتية لمصفوفة، لتحويل خطي، ثم أقطار المصفوفات والتطبيقات الخطية، ثم مبرهنة كابيلي هاملستون واستخدامها في حساب معكوس مصفوفة وقد درسنا أيضاً كثيرة الحدود المميزة لمصفوفة والمعادلة لها ثم المصفوفات المتشابهة والمصفوفات

المتعامدة.

لقـــد تـــم عرض المواضيع في كل فصل بتفصيل مناسب و تضمنت معظم الفقرات أمثلة محلوله لتساعد على ترسيخ المفاهيم والمعلومات في ذهن الدارس كما أتبع كل فصل لتمارين عديدة للحل.

وأخيراً نرجو من الله العلي القدير أن يحقق هذا الكتاب الغاية المرجوة منه.

د. مصباح مفتاح العروي، د. أحمد حسان الغصين

سرت 1998.04.26

الفصل الأول Chapter 1

Matrices and المصفوفات والمحددات Determinants

أولاً، المصفوفات (The Matrices):

تعريف (1-1-1):

ليكن F حقلاً اختيارياً*، المجموعة المستطيلة المرتبة من الأعداد على الشكل:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \ \cdots \ \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1.1.1)$$

حيث aij أعداد في الحقل F نسميها مصفوفة.

يرمز لعناصر المصفوفة بأحرف لاتينية صغيرة مذيلة بدليلين ليشيران إلى موضع وجود العنصر في المصفوفة.

فـالدليل الأول يشير إلى رقم الصف والدليل الثاني يشير إلى رقم العمود اللذين يقع فيهمـا العنصـر، فمثلاً العنصر aij يقع في الصف ذي الرقمi والعمود ذي الرقمj أي في مكان تلاقيi مع j.

أما المصفوفات فيرمز لها بأحرف لاتينية كبيرة ....A,B,C إذا كانت المصفوفة A تحـوي m صفاً وn عموداً و $m \neq n$ فإننا نقول عن A إنها مصفوفة مستطيلة من المرتبة (m,n) أمـا إذا كان عدد صفوف المصفوفة A يساوي عدد أعمدتها ويساوي n فمثلاً نقول عن A إنها مصفوفة مربعة من المرتبة n.

يمكن أن تكتب الشكل (1.1.1) بالشكل

$$A_{(m,n)} \quad \text{أو} \quad A = [a_{ij}](m,n)$$

أما إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n فإنها تكتب على الشكل:

* راجع تمرين الحقل في الملحق (أ).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \dots \quad \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (1.1.2)$$

أو اختصاراً $A = [a_{ij}]$ أو A_n إذا لم يكن هناك مجال للالتباس.

تعريف (1.1.2):

نسمى القطر المؤلف من العناصر $a_{11} \quad a_{22} \dots a_{nn}$ في المصفوفة المربعة بالقطر الرئيسي بينما نسمي القطر المؤلف من العناصر $a_{n1} \quad a_{(n-1)2} \dots a_{1n}$ والممتد من الزاوية اليمني العليا إلى الزاوية اليسرى السفلي بالقطر الثانوي.

تعريف (1.1.3):

نقول عن المصفوفتين $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ أنهما متساويتان إذا وفقط إذا كان:

أ) المصفوفتان A و B من مرتبة واحدة.

ب) العناصر المتقابلة في كلتا المصفوفتين متساوية أي: $a_{ij} = b_{ij}$ من أجل جميع i و j

ونشير إلى المساواة بين المصفوفتين بـ $A = B$.

مثال (1.1.1):

إذا كانت:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \\ 6 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

فإن:

$$a_1 = -1, b_1 = 2, c_1 = 3 \ \wedge \ a_2 = 2, b_2 = 5, c_2 = 4 \ \wedge \ a_3 = 6, b_3 = -8, c_3 = 0$$

تعريف (1.1.4):

نقول بالتعريف إن المصفوفة $A = [a_{ij}]$ هي مصفوفة حقيقية إذا كانت جميع

عناصـــرها x_{ij} مـــأخوذة مـــن حقل الأعداد الحقيقية $(\Re,+,.)$ونقول عنها أنها مصفوفة مركبة إذا كانت جميع عناصرها a_{ij}مأخوذة من حقل الأعداد المركبة $(D,+,.)$.

مثال (1.1.2):

إن المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة حقيقية من المرتبة (3,4) بينما المصفوفة

$$B=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2+i \\ -i & 7 & 1-i \\ 0 & i & 2+3i \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة مركبة من المرتبة (4,3)

تعريف (1.1.5):

لـــتكن $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مركبة، نسمي المصفوفة $A=[a_{ij}]$ بالمصفوفـــة المرافقة ( ) لـــ A حيث a_{ij} مرافق a_{ij}.

مثال (1.1.3):

لتكن: $A=\begin{bmatrix} 2 & 3-i \\ 5i & 2+i \end{bmatrix}$

إن مرافق هذه المصفوفة هي المصفوفة:

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3+i \\ -5i & 2-i \end{bmatrix}$$

سنذكر فيما يلي أنواع المصفوفات وهي:

1- المصفوفة الصفية (وحيدة الصف) (*Row matrix*):

وهـــي مصـــفوفة مستطيلة من المرتبة(1,n) أي إنها تحوي صفاً واحداً و n عموداً وتكتب بالشكل:

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \ldots a_n \end{bmatrix}$$

2- المصفوفة العمودية (وحيدة العمود)(*Column matrix*):

وهـــي مصفوفة مستطيلة من المرتبة (m , 1) أي أنها تحوي m صفاً وعموداً واحداً ولها الشكل:

$$A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

3- المصفوفة وحيدة العنصر:

وهي مصفوفة تحوي صفاً واحداً وعموداً واحداً. أي أنها تحوي عنصراً واحداً فقط وتكتب على الشكل:

$A=[a]$ أو اختصاراً $A=a$.

4- المصفوفة الصفرية (*Null Matrix*):

نقـــول عـــن المصفوفة $A=[a_{ij}]$ أنها مصفوفة صفرية إذا كان $a_{ij}=0$ من أجل جميع قيم i و j هذا وسنرمز للمصفوفة الصفرية بالرمز $O_{(m,n)}$ أو بـــ 0 إذا لم يكن هناك مجال للالتباس.

5- المصفوفة القطرية (*Diagonal Matrix*):

وهـــي مصفوفة مربعة فيها جميع العناصر الواقعة خارج القطر الرئيسي معدومة وتكتب بالشكل:

$$A=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

أو اختصاراً $D = dig[d_1, d_2, ..., d_n]$

إن التعريف لا يمنع أن تتكون بعض عناصر القطر الرئيسي أصفاراً، فمثلاً المصفوفة التالية هي مصفوفة قطرية من المرتبة الرابعة.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6- المصفوفة السلمية (*Scalar Matrix*):

وهي مصفوفة مربعة تكون فيها جميع عناصر القطر الرئيسي مساوية لعدد ثابت a أما بقية العناصر فمعدومة وتكون من الشكل:

$$\alpha_n=\begin{bmatrix} \alpha & 0 \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots\dots \\ 0 & 0 \dots & \alpha \end{bmatrix}$$

7- مصفوفة الوحدة (*Identity Matrix*):

وهي مصفوفة مربعة E_n تكون فيها جميع العناصر الواقعة على القطر الرئيسي مساوية إلى الواحد وبقية العناصر الواقعة خارج القطر الرئيسي معدومة. وتكتب على الشكل:

$$E_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

8- المصفوفة المثلثية (*Triangular Matrix*):

ونميز فيها شكلين:

أ) المصفوفة المثلثية العليا: وهي مصفوفة مربعة فيها جميع العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي معدومة وشكلها العام هو:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ب) المصـــفوفة المثلـثية السفلي: وهي مصفوفة مربعة تكون فيها العناصر الواقعة فوق القطر الرئيسي معدومة وهي من الشكل:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ملاحظة (1.1.1):

يمكـــن ملاحظـــة أنه لا يوجد أي شرط على عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة المثلثية السفلي.

مثال (1.1.4):

إن المصفوفة A التالية هي مصفوفة مثلثية عليا من المرتبة الثالثة، أما المصفوفة B فهي مصفوفة مثلثية سفلي من المرتبة الرابعة.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

9- المصفوفة المتماثلة (*Symmetric Matrix*):

وهي مصفوفة مربعة من المرتبةn يكون فيها $a_{ij} = a_{ji}$ من أجل جميع قيم i و j.
فمثلاً إن المصفوفة التالية هي مصفوفة متماثلة من المرتبة الرابعة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix},$$

10- المصفوفة ذات التماثل العكسي (ملتوية التماثل) (*Skew – Symmetric Matrix*):

هي مصفوفة مربعة من المرتبة n يكون فيها $a_{ij} = -a_{ji}$. وذلك من أجل جميع قيم i و j.

مثال على ذلك المصفوفة التالية هي مصفوفة ذات تماثل عكسي من المرتبة الثالثة:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

11- المصفوفة الهرميتية: (*Hermitian Matrix*):

نقـــول عـــن المصفوفة المربعة المركبة $A = [a_{ij}]_n$ أنها مصفوفة هرميتية إذا كان $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$. من أجل جميع قيم i و j.

ملاحظة (1.1.2):

بمـــا أن مرافق العدد الحقيقي هو نفسه فإننا نستنتج أن عناصر القطر الرئيسي في المصـــفوفة الهرميتية هي أعداد حقيقية، فمثلاً أن المصفوفةA التالية هي مصفوفة هرميتية من المرتبة الثالثة.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3-i & i \\ 3+i & 0 & 1+i \\ -i & 1-i & 3 \end{bmatrix}$$

سنتطرق فيما يلي إلى العمليات على المصفوفات.

1- ضرب مصفوفة بعدد (*Scalar Multiplication*):

لـــتكن المصفوفة $A=\left[a_{ij}\right]$. وليكن α عدداً حقيقياً $(\alpha \in \Re)$ إن جداء المصفوفة A بـــالعدد α هـــو المصـــفوفة الناتجة عن ضرب كل عنصر من عناصر A بالعدد α أي $\alpha A=\left[\alpha a_{ij}\right]$.

ملاحظة (1.1.3):

يمكن ملاحظة أن المصفوفة αA لها نفس مرتبة المصفوفة.

مثال (1.1.5):

إذا كانت المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 2.7 & -1.8 \\ 0 & 0.9 \\ 9.0 & -4.5 \end{bmatrix}$$

فإن:

$$-A=\begin{bmatrix} -2.7 & 1.8 \\ 0 & -0.9 \\ -9.0 & 4.5 \end{bmatrix}, \quad \frac{10}{9}A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}, \quad 0.A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مـــن تعـــريف ضرب مصفوفة بعدد نستنتج أنه إذا كانت $A=\left[a_{ij}\right]$. مصفوفة ما، وكان a عدداً حقيقياً $(a \in \Re)$ فإن:

أ) $\beta \in \Re$ ؛ $\alpha(\beta.A)=(\alpha.\beta).A$

ب) $1.A=A$

ج) $0A=\bar{0}$: حيث أن 0 هو الصفر العادي و $\bar{0}$ هو المصفوفة الصفرية.

2- جمع المصفوفات (*Addition of Matrices*):

إن مجمـــوع مصفوفتين حقيقيتين $B=\left[b_{ij}\right]$. $A=\left[a_{ij}\right]$. من مرتبة واحدة (m,n) هو مصفوفة جديدة $C=\left[C_{ij}\right]$.لها نفس مرتبة A و B وعناصرها C_{ij} معرفة كما يلي:

$$C_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

وذلك من أجل جميع قيم i و j ونكتب ذلك على الشكل التالي:

$$A+B=\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]$$

مما سبق نستنتج أن عملية الجمع المعروفة على مجموعة المصفوفات الحقيقية التي ترمــز لهــا بـــــ $M_{(m,n)}(\Re)$ هــي عمــلية داخــلية تتصــف بما يلي وذلك مهما تكن $A,\ B,C\in M_{(m,n)}(\Re)$:

أ) المصفوفة 0 عنصر محايد بالنسبة للجمع أي أن:

$$0+A=A+0=A$$

ب) الجمع تجميعي أي أن:

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

ج) لكل مصفوفة A نظير بالنسبة للجمع هو A- حيث أن:

$$A+(-A)=(-A)+A=0$$

د) الجمع تبديلي أي أن:

$$A+B=B+A$$

نتيجة (1.1.1):

إن المجموعة $M_{(m,n)}(\Re)$ تشكل زمرة تبديلية* بالنسبة لعملية جمع المصفوفات.

نتيجة (1.1.2):

من أجل أي مصفوفتين A و B من $M_{(m,n)}(\Re)$ و أي عددين $\alpha,\beta\in\Re$ سيكون:

---

* راجع الملحق (أ).

$$(a+\beta)A = \alpha A + \beta A \qquad (*)$$
$$\alpha(A+B) = \alpha A + aB \qquad (**)$$

سنبرهن العلاقة*:

$$(\alpha+\beta)A = (\alpha+\beta)[a_{ij}] = [(\alpha+\beta)a_{ij}] = [\alpha\, a_{ij} + Ba_{ij}]$$
$$= [\alpha\, a_{ij}] + [\beta\, a_{ij}] = \alpha[a_{ij}] + \beta[a_{ij}] = \alpha\, A + \beta\, A$$

أما برهان (**) فيكون:

$$\alpha(A+B) = \alpha[a_{ij} + b_{ij}] = [\alpha(a_{ij} + b_{ij})] = [\alpha\, a_{ij} + \alpha\, b_{ij}]$$
$$= [\alpha\, a_{ij}] + (\alpha\, b_{ij}) = \alpha[a_{ij}] + \alpha[b_{ij}] = \alpha\, A + \alpha\, B$$

مثال (1.1.6):

أوجد مجموع المصفوفتين التاليتين:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 5 \\ 6 & 8 & -9 & 2 \\ 7 & -9 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل أن:

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 5 \\ 6 & 8 & -9 & 2 \\ 7 & -9 & 0 & 4 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 2+(-2) & -1+3 & 3+0 & 1+5 \\ 1+6 & 2+8 & -4+(-9) & 5+2 \\ 0+7 & 3+(-9) & 5+0 & 6+4 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 6 \\ 7 & 10 & -13 & 7 \\ 7 & -6 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

3- ضرب المصفوفات (Matrix Multiplication):

لتكن المصفوفتان:

---

* راجع الملحق (أ).

$$A = [a_{ij}] \in M_{(m,n)}(\Re)$$
$$B = [b_{ij}] \in M_{(n,t)}(\Re)$$

إن جداء المصفوفتين السابقتين هو مصفوفة C حيث:

$$C = A.B = [C_{ij}] \in M_{(m,t)}(\Re)$$

والتي عناصرها C_{ij} معرفة على الشكل التالي:

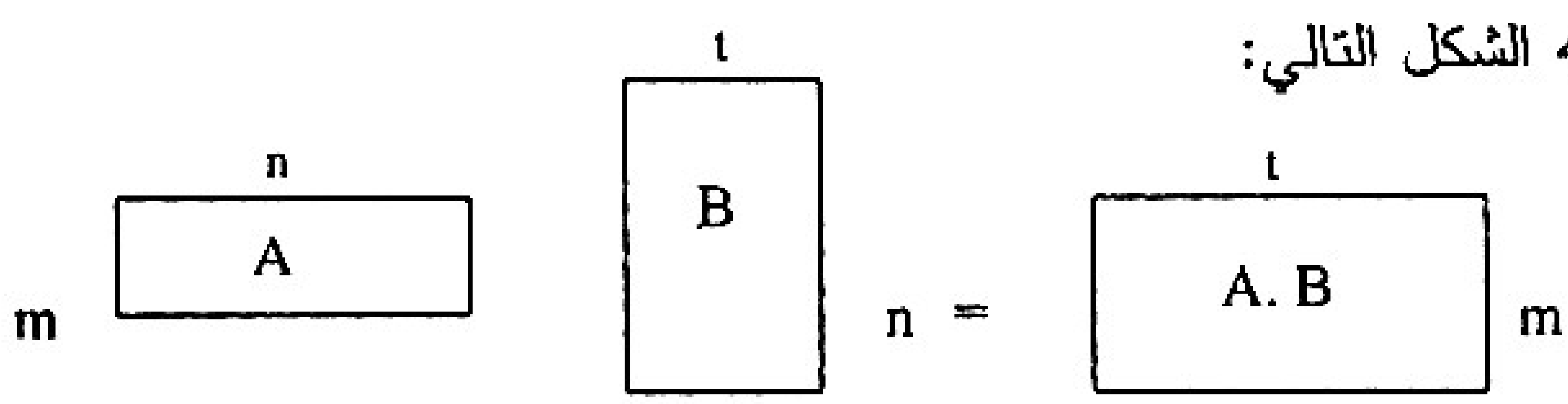
$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots\dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

حيث: $i = 1,2.....m$, $j = 1,2,.....t$

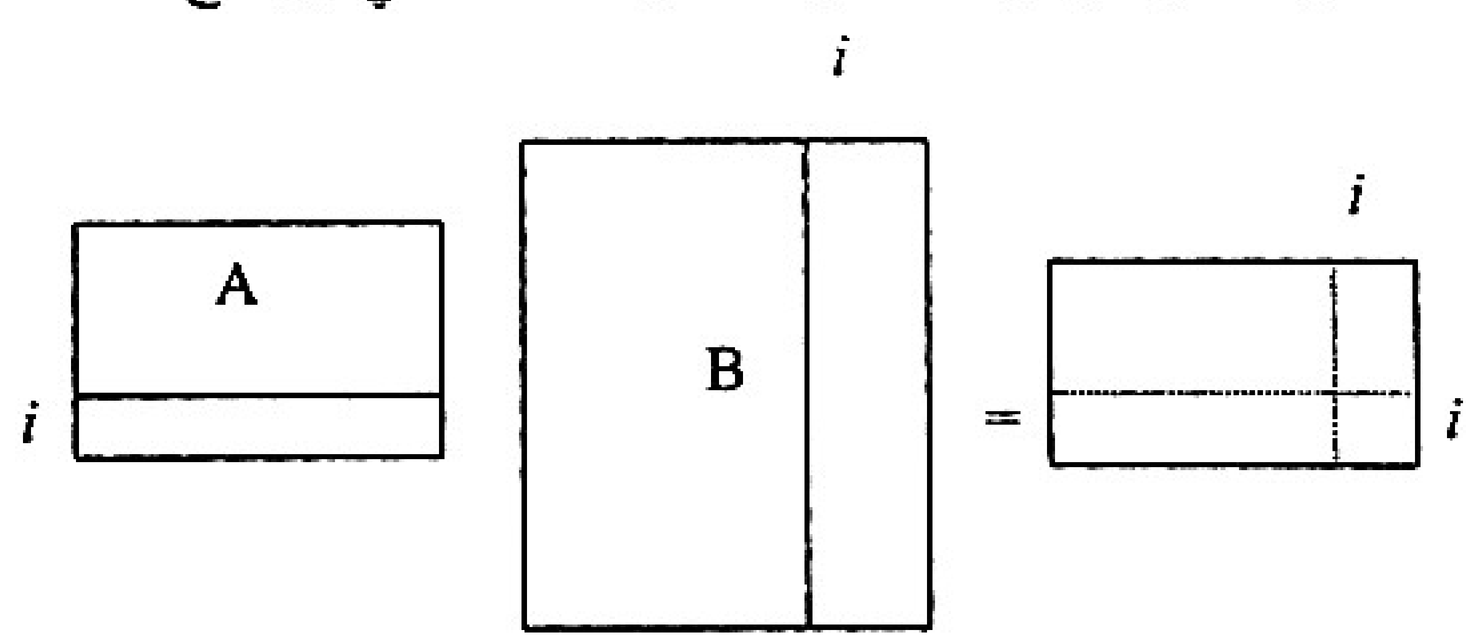
من التعريف السابق لجداء المصفوفتين A و B نلاحظ ما يلي:

أ) أن الجداء A –B يكون معرّفاً إذا وفقط إذا كان عدد صفوف المصفوفةB والواقعة في اليمين مساوياً لعدد أعمدة المصفوفةA (الواقعة في اليسار) في الجداء السابق.

ب) إن مرتــبة مصــــفوفة الجداء B . A هو (m,t) أي أن عدد صفوف هذه المصفوفة (مصــــفوفة الجــداء) يساوي عدد صفوف المصفوفة A (الواقعة في اليسار). وأن عدد أعمـــدة مصـــفوفة الجداء يساوي عدد أعمدة المصفوفةB (الواقعة في اليمين) وهذا ما يوضحه الشكل التالي:



ج) إن العنصـــر C_{ij} من مصفوفة الجداء يساوي إلى مجموع جداءات عناصر الصفi من المصفوفة A بعناصر العمود j من المصفوفةB، والشكل التالي يوضح ذلك.



وهكـــذا فإن العنصر C_{i1} من مصفوفة الجداء يساوي إلى مجموع جداءات عناصر الصف الأول من المصفوفة A بعناصر العمود الأول من المصفوفةB، وبشكل مشابه نجد أن عنصـــر مصـــفوفة الجداء مثلاً يساوي إلى مجموع جداءات عناصر الصف الثاني من المصفوفة A بعناصر العمود الخامس من المصفوفةB.

4- جداء أي مصفوفة A من اليمين أو اليسار بالمصفوفة الصفرية 0 (ذات مرتبة مناسبة) هو مصفوفة صفرية.

مثال (1.1.7):

ليكن لدينا المصفوفتان:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

إن الجداء A . B معرف ، في حين أن الجداء B .A غير معرف ، لماذا؟

$$A.B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\\ C_{31} & C_{32}\end{bmatrix}$$

$$C_{11}=2.2+1(-1)+0.1=3 \quad , \quad C_{12}=2.1+1.3+0.1=5$$
$$C_{21}=0.2-1(-1)+1.1=2 \quad , \quad C_{22}=0.1-1.3+1.2=-1$$
$$C_{31}=1.2+2(-1)+3.1=3 \quad , \quad C_{32}=1.1+2.3+3.2=13$$

وبالتالي فإن:

$$A.B=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 2 & -1\\ 3 & 13\end{bmatrix}$$

مثال(1.1.8)

لتكن المصفوفتان:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

إن الجداءين B.A ، B.A معرفين لماذا؟

$$A.B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$B.A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

وهكذا نلاحظ أنه في الحالة العامة $A.B \neq BA$

وفـــي الحالـــة الخاصـــة الـــتي يكون فيها $A.B = B.A$ فإننا نقول عن A و B إنهما متبادلتان.

كمـــا نلاحـــظ أنــــه من الممكن أن يكون جداء مصفوفتين A و B مساوياً للمصفوفة الصفرية في الوقت الذي يكون فيه $A \neq 0$ و $B \neq 0$ المثال (1.1.8) يوضح ذلك.

مثال (1.1.9)

لتكن المصفوفتان:

$$A=\begin{bmatrix}Cos\alpha & -Sin\alpha\\ Sin\alpha & Cos\alpha\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}Cos\beta & -Sin\beta\\ Sin\beta & Cos\beta\end{bmatrix}$$

إن $AB = BA$ ويكون

$$A.B=B.A=\begin{bmatrix}Cos(\alpha+\beta) & -Sin(\alpha+\beta)\\ Sin(\alpha+\beta) & Cos(\alpha+\beta)\end{bmatrix}$$

إذن فالمصفوفتان A و B متبادلتان

مثال (1.1.10)

لـــنفرض أن $A=[a_{ij}]$ مصفوفة حقيقية من المرتبة (m,n) و D_n و D_m مصفوفتان قطريتان حقيقيتان الأولى من المرتبة n والثانية من المرتبة m فإن:

$$AD_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \dots \dots \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \alpha_2 \dots 0 \\ \dots & \dots \dots \dots \\ 0 & 0 \dots \alpha_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 a_{11} & \alpha_2 a_{12} & \dots & \alpha_n a_{1n} \\ \alpha_1 a_{21} & \alpha_2 a_{22} & \dots & \alpha_n a_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_1 a_{m1} & \alpha_2 a_{m2} & \dots & \alpha_n a_{mn} \end{bmatrix}$$

أي أن عمــلية ضرب المصفوفة A بالمصفوفة القطرية D_n مكافئة لعملية ضرب كل عمود من أعمدة المصفوفة A بالعنصر الموافق من المصفوفة D_n.

وبــنفس الطــريقة نجــد أن $D_m A$ أي أن عملية ضرب المصفوفة القطرية D_m بالمصـــفوفة A مكافئة لعملية ضرب كل صف من صفوف المصفوفة A بالعنصر الموافق من المصفوفة D_m بمعنى

$$D_m .A = \begin{bmatrix} \alpha_1 a_{11} & \alpha_1 a_{12} & \dots & \alpha_1 a_{1n} \\ \alpha_2 a_{21} & \alpha_2 a_{22} & \dots & \alpha_2 a_{2n} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n a_{m1} & \alpha_m a_{m2} & \dots & \alpha_m a_{mn} \end{bmatrix}$$

نتيجة (3.1.1):

جداء مصفوفتين قطريتين حقيقيتين، D_n ، C_n هو مصفوفة قطرية عناصرها هي جداء العناصر المتقابلة من D_n و C_n أي أن:

$$C_nD_n=\begin{bmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} C_1d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_nd_n \end{bmatrix}=D_nC_n$$

مـــن الضـــرب السابق نلاحظ أن عملية ضرب المصفوفات القطرية تحقق خاصية التبديل.

نتيجة (1.1.4):

إن عملية ضرب مصفوفة $A=\left[a_{ij}\right]_{(m,n)}$ من اليسار أو من اليمين بمصفوفة سلمية $B=[\alpha]_{(n,n)}$ ذات مرتبة (n,n) تكافئ عملية ضرب المصفوفة A بالعدد α.

فمثلاً:

$$\begin{bmatrix} \partial_{11} & \partial_{12} \dots \partial_{1n} \\ \partial_{21} & \partial_{22} \dots \partial_{2n} \\ \vdots & \dots \dots \dots \\ \partial_{m1} & \partial_{m2} \dots \partial_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial & & \\ & \partial & \\ & & \ddots & \\ & & & \partial \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha\partial_{11} & \alpha\partial_{12} \dots \alpha\partial_{1n} \\ \alpha\partial_{21} & \alpha\partial_{22} \dots \alpha\partial_{2n} \\ \vdots & \dots \dots \dots \\ \alpha\partial_{m1} & \alpha\partial_{m2} \dots \alpha\partial_{mn} \end{bmatrix}$$

و فـــي الحالـــة الـــتي يكـــون فيها $\alpha=1$، أي الحالة التي يكون فيها المصفوفتان السلميتان B_m و B_n مصفوتي وحدة E_n و E_m نجد أن:

$$A.E_n=E_mA=A.$$

مبرهنة (1.1.1)

لتكن لدينا المصفوفات

$$A=\left[a_{ij}\right]_{(m,p)} \quad , \quad B=\left[b_{ij}\right]_{(P,q)} \quad , \quad C=\left[C_{ij}\right]_{(q,n)}$$

على نفس الحقل K عندئذ: (A.B) C= A. (B.C)

البرهان:

لنفرض أن:

$$(A.B)C = D = [dij] \qquad , \qquad A(B.C) = T = [t_{ij}]$$

على نفس الحقلK عندئذ: (A.B) C= A. (B.C

فيكون:

$$d_{ij} = \sum_{S=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{ks}\right) C_{Si} = \sum_{k=1}^{q}\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{ks} C_{Sj}$$

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\left(\sum_{s=1}^{q} b_{ks}\, C_{sj}\right) = \sum_{K=1}^{p}\sum_{s=1}^{q} aik\, b_{ks}\, C_{Sj}.$$

ولمـــا كـــان ترتيب إشارات الجمع لا يغير شيء في قيمة المجاميع المحسوية فإننا نستنتج أن:

$$\sum_{s=1}^{q}\sum_{K=1}^{P} a_{ik} b_{ks} C_{Sj} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{s=1}^{q} a_{ik} b_{ks} C_{Sj}$$

وبالتالي:

$d_{ij} = t_{ij}$ و ذلك من أجل جميع قيم i و j أي أن:

(A.B).C= A.(B.C)

مبرهنة (1.1.2):

لتكن المصفوفات:

$$A = [a_{ij}]_{(m.P)} \qquad , \qquad B = [b_{ij}]_{(p,n)} \qquad , \qquad C = [C_{ij}]_{(P.n)}$$

على الحقل K عندئذ:

A(B+C) = AB+AC

البرهان:

لنفرض أن: $AB + AC = T = [t_{ij}] \qquad , \qquad A(B+C) = D = [d_{ij}]$

فيكون لدينا:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{P} a_{ik}(b_{kj} + C_{kj}) = \sum_{k=1}^{P}(a_{ik}b_{kj} + a_{ik}b_{kj}) = \sum_{k=1}^{P} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{P} a_{ik}C_{ik} = t_{ij}$$

وذلك من أجل جميع قيم i و j أي أن:

A(B+C) =AB+AC

ملاحظات:

1- إن جداء المصفوفة العمودية بالمصفوفة الصفية معرّف دوماً ومهما يكن عدد العناصر في كل من المصفوفتين:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} [b_1 \;\; b_2 \dots b_n] = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & \dots & a_2b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \partial_m b_3 & \dots & a_mb_n \end{bmatrix}$$

2- إن جــداء المصــفوفة الصفية بالمصفوفة العمودية يكون معرفا فقط عندما يكون عدد عناصر المصفوفة الأولي مساوياً لعدد عناصر المصفوفة الثانية و هكذا فإن:

$$[a_1 \;\; a_2 \dots a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n] = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

كما نلاحظ هنا أن مصفوفة الجداء في هذه الحالة وحيدة العنصر.

تعريف (1.1.6) منقول مصفوفة (*Transpose of Matrix*):

إن مــنقول مصــفوفة هو مصفوفة جديدة صفوفها هي أعمدة المصفوفة المفروضة وبالعكس.

يرمز لمنقول مصفوفة Aعادة بالرمز A^T ، فإذا كان لدينا المصفوفة.

$A = [a_{ij}]_{(m,n)}$

فإن منقول A^T هو: $A^T = \left[a_{ji}\right]_{(n,m)}$

من التعريف (1.1.6) لمنقول مصفوفة نلاحظ مباشرة أن:

$$(A^T)^T = A$$

مثال (1.1.11):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 6 & 7 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 4 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \\ -5 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

مبرهنة (1.1.3):

لتكن A و B مصفوفتان على نفس الحقل k عندئذ:

1- إذا كانتا من نفس المرتبة (m,n) فإن:

$$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$$

2- وإذا كانتا متوافقتين بالنسبة للضرب فإن:

$$(A.B)^T = B^T.A^T \quad , \quad (\forall a \in \Re); (\alpha A)^T = \alpha A^T$$

البرهان:

سنبرهن فقط على الشق الأول من (2)أما البقية فنترك كتمرين للقارئ:

بفرض أن: $B = \left[b_{ij}\right]_{(p,n)} \quad , \quad A = \left[a_{ij}\right]_{(m.p)}$

فيكون:

$$A.B = C = \left[C_{ij}\right]_{(m.n)}$$

أن: $(AB)^T = \left[C_{ij}\right]_{(n,m)}(*)$ وكذلك.

$$B^T A^T = \left[\sum_{k=1}^{p} b_{ik} a_{kj}\right] = \left[\sum_{k=1}^{p} b_{ki} a_{jk}\right]$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{k1}\right] = \left[C_{ji}\right](**)$$

بمقارنة (*) بـ (**) نحصل على: $(A.B)^T = B^T A^T$

المصفوفات البسيطة (*Simple Matrices*):

بداية سنسمي التحويلات التالية على مصفوفة ما بالتحويلات البسيطة:

1- المبادلة بين موضعي صفين (عمودين) في المصفوفة ونرمز له بـ * $D[i,i_1]$ $(D[j,j_1])$

2- ضرب أحد صفوف (أعمدة) المصفوفة بمقدار عددي مغاير للصفر ونرمز له بـ $D[i,i_1]$ $(D[j,j_1])$.

3- إضافة أحد صفوف (أعمدة) المصفوفة بعد ضربه بمقدار عددي إلى صف (عمود) آخر من نفس المصفوفة ونرمز لذلك بـ $D[i,\alpha i_1+i]$ $(D[j,\alpha j_1+j])$

بفرض أن A مصفوفة من المرتبة (m,n)=

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

سنعرض الآن بالتفصيل كيفية إنجاز كل من التحويلات البسيطة على هذه المصفوفة.

---

* $D[i,i_1]$ وهكذا هي مصفوفات مختارة نضرب فيها المصفوفة A، وهي مصفوفات بسيطة مناسبة.

1- من أجل المبادلة بين الصفين ذي الرقمين i و j في المصفوفة A يكفي أن نقوم بضرب المصفوفة A من اليسار بمصفوفة مربعة من المرتبة m لها الشكل التالي:

$$D[i,j]=\begin{bmatrix} 1 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 1 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 1 \ldots 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ 0 \ldots 0 \ldots 1 \ldots 0 \ldots 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{الصف (i)} \\ \\ \text{الصف (j)} \\ \\ \\ \end{array}$$

العمود (j) العمود (i)

أما من أجل المبادلة بين موضعي العمودين ذي الرقمين (i) و (j)، في المصفوفة A نقـــوم بضرب المصفوفة A من اليمين بالمصفوفة $D[i,j]$ على أن تكون مرتبتها في هذه الحالة مساوية لـــ n.

مثال (1.1.12):

للمبادلة بين الصفين الثاني والرابع في المصفوفة A التالية:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

نقوم بضرب هذه المصفوفة من اليسار بالمصفوفة:

$$D(2,4)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فنحصل على:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&0\\2&-1&3\\1&0&2\\0&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&1\\1&0&2\\2&-1&3\end{bmatrix}$$

مثال (1.1.13):

للمـــبادلة بيـــن موضــــعي العمودين الثاني والثالث في المصفوفة A السابقة: نقوم بضرب هذه المصفوفة من اليمين بالمصفوفة.

$$D(2,3)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

فنحصل على المصفوفة:

$$\begin{bmatrix}1&2&0\\2&-1&3\\1&0&2\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&3&-1\\1&2&0\\0&1&2\end{bmatrix}$$

2- مـــن أجـــل ضـــرب عناصر الصف (i) في المصفوفة $A=\left[a_{ij}\right]_{(m,n)}$ بمقدار عددي $\alpha \neq 0$ يكفـــي أن نقوم بضرب هذه المصفوفة من اليسار بمصفوفة مربعة من المرتبة m لها الشكل التالي:

$$D[i,\alpha]=\begin{bmatrix}1&0&\dots&0&\dots&0\\0&1&\dots&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots\dots&\dots&\dots&\\0&0&\dots&\alpha&\dots&0\\0&0&\dots&0&\dots&1\end{bmatrix}(i)$$

أمـــا إذا أردنـــا ضرب عناصر العمود i من المصفوفة $A=\left[a_{ij}\right]$ بمقدار $\alpha \neq 0$ فإنه يكفي أن نضرب هذه المصفوفة من اليمين بالمصفوفة المربعة $D[i,\alpha]$ على أن تكون من مرتبة n.

مثال (1.1.14):

لتكن لدينا المصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -2 & 5\\ 1 & 2 & 0 & 3\\ 4 & 1 & 6 & 2\\ 2 & -3 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

ومن أجل ضرب عناصر الصف الثاني من هذه المصفوفة بـــ 5 نقوم بضرب هذه المصفوفة من اليسار بالمصفوفة المربعة:

$$D[2.5]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1 & -2 & 5\\ 1 & 2 & 0 & 3\\ 4 & 1 & 6 & 2\\ 2 & -3 & 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & -2 & 5\\ 5 & 10 & 0 & 15\\ 4 & 1 & 6 & 2\\ 2 & -3 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

أمـــا لضـــرب عناصر العمود الرابع مثلاً من المصفوفة السابقة بالعدد 2 فإننا نقوم بضرب المصفوفة A من اليمين بالمصفوفة:

$$D[4,2]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

يكون لدينا:

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & -2 & 5\\ 1 & 2 & 0 & 3\\ 4 & 1 & 6 & 2\\ 2 & -3 & 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & -2 & 10\\ 1 & 2 & 0 & 6\\ 4 & 1 & 6 & 4\\ 2 & -3 & 5 & 2\end{bmatrix}$$

3- من أجل إضافة الصف (j) من المصفوفة $A=\left[a_{ij}\right]_{(m,n)}$ بعد ضربه بمقدار عددي α

إلى الصـــف (i) مـــن نفـــس المصفوفة يكفي أن نقوم بضرب A من اليسار بمصفوفة مربعة من المرتبة m لها الشكل التالي:

$$D\left[i+j\times\alpha\right]=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}1 \dots 0 \dots 0 \dots 0 \dots 0\\ 0 \dots 1 \dots 0 \dots 0 \dots 0\\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots\\ 0 \dots 0 \dots 1 \dots \alpha \dots 0\\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots\\ 0 \dots 0 \dots 0 \dots 1 \dots 0\\ 0 \dots 0 \dots 0 \dots 0 \dots 1\end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ (i)\\ \\ (j)\\ \\ \end{array}\\ (i)\qquad (j) & \end{array}$$

مثال (1.1.15):

لتكن لدينا المصفوفة المعروفة بالشكل التالي:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 5 & 3\end{bmatrix}$$

مـــن أجل إضافة الصف الثالث من المصفوفة السابقة بعد ضربه بـــ 2 إلى الصف الثاني نقوم بضرب هذه المصفوفة من اليسار بالمصفوفة المربعة التالية:

$$D[2+3\times 2]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 2 & 5 & 8\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 5 & 3\end{bmatrix}$$

أما إذا أردنا إضافة العمود (j) من المصفوفة $A=\left[a_{ij}\right]_{(m,n)}$. بعد ضربه بالعدد α إلى العمـــود (i) مـــن نفـــس المصـــفوفة يكفي أن نقوم بضرب المصفوفة A من اليمين

بمصفوفة مربعة من المرتبةn ذات الشكل.

$$D[i+j\times\alpha]=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ (i)\\ (j)\\ \\ \\ \\ \end{array}\\ \text{"i"} \qquad \text{"j"} & \end{array}$$

مثال (1.1.16)

لتكن لدينا المصفوفة A التالية:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 4 & 7\\ 6 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

لإضـــافة العمود الرابع في المصفوفة A بعد ضربه بـــ 3− إلى العمود الثاني من نفس المصفوفة السابقة تقوم بضرب هذه المصفوفة من اليمين بالمصفوفة المربعة التالية:

$$D[2+4(-3)]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

نحصل على:

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 4 & 7\\ 6 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -14 & 3 & 5\\ 1 & -19 & 4 & 7\\ 6 & -8 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

تـــدعى المصفوفات $D[i,i_1]$ و $D[j,j_1]$ و $D[i,\alpha i_1+i]$ و $D[j,\alpha j_1+j]$ بالمصفوفات البسيطة.

تعريف (1.1.6):

تسمي المصفوفة الناتجة من المصفوفة الواحدية بعد إجراء إحدى التحويلات البسيطة عليها بالمصفوفة البسيطة.

يمكن التأكد و بسهولة بأن كل من المصفوفات البسيطة $D[i,i_1]$ و $D[j,j_1]$ و $D[i,\alpha\, i_1+i]$ و $D[j,\alpha\, j_1+j]$ يمكن الحصول عليها من المصفوفة الواحدية وذلك بإجراء تحويل بسيط مناسب.

كل ما سبق يمكن أن نجمله في نص المبرهنة التالية:

مبرهنة (1.1.4):

إن إجراء أي تحويل بسيط على مصفوفة ما يكافئ عملية ضرب هذه المصفوفة بمصفوفة بسيطة مناسبة. فإذا كان التحويل البسيط مطبقاً على صفوف المصفوفة فإنه يكون مكافئاً لعملية ضرب هذه المصفوفة من اليسار بالمصفوفة البسيطة، أما إذا كان مطبقاً على أعمدة المصفوفة فإنه يكون مكافئاً لضرب المصفوفة من اليمين بالمصفوفة البسيطة.

معكوس مصفوفة (Inverse of aMatrix):

تعريف (1.1.7):

إن معكوس المصفوفة المربعة A هو مصفوفة B والتي من أجلها يكون:

$$A.B = B.A = E \qquad (1.1.3)$$

حيث أن E هي مصفوفة الوحدة:

نسمي المصفوفة المربعة A مصفوفة قابلة للعكس إذا كان يوجد لها معكوس، نرمز عادة لمعكوس المصفوفة A بـ A^{-1} و نستطيع عندها كتابة (1.1.3) بالشكل:

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = E \qquad (1.1.4)$$

نتائج:

1- إن مصفوفة الوحدة E قابلة للعكس وأن: $E^1 = E$

2- إذا كانت المصفوفة المربعة A قابلة للعكس فإن معكوسها يكون قابلاً للعكس أيضاً ويكون: $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

3- المصفوفات القابلة للعكس هي دوماً مربعة إلا أنه ليست كل مصفوفة مربعة قابلة للعكس وأبسط مثال على ذلك المصفوفة الصفرية 0_n.والتي من أجلها يكون.

$$O_n A_n = A_n O_n \neq E_n$$

إن جميع المصفوفات المربعة غير الصفرية و من المرتبة الأولي هي مصفوفات قابلة للعكس لأنه إذا كان:

$$A^{-1} = \left[a^{-1}\right] \quad \text{فإن} \quad A = [a] \;,\; a \neq 0$$

غير أنه ضمن المصفوفات غير الصفرية المربعة من المرتبةn ، $n \geq 2$ يوجد مصفوفات غير قابلة للعكس. والتأكد من ذلك يكفي أن نأخذ مصفوفة مربعة جميع عناصر أحد صفوفها (أعمدتها) أصفاراً، فإذا ضربنا هذه المصفوفة بأي مصفوفة أخري من نفس المرتبة من اليمين أو اليسار سوف نحصل على مصفوفة جديدة جميع عناصرها أحد صفوفها (أعمدتها) أصفاراً أي أن جداء هاتين المصفوفتين سيكون مختلفاً عن مصفوفة الوحدة E.

تعريف (1.1.8):

نسمي المصفوفة المربعة A مصفوفة نظامية إذا حصلنا منها وبعد إجراء عدد من التحويلات البسيطة على صفوفها (أعمدتها) على مصفوفة مثلثية عليا (سفلي) جميع عناصر قطرها الرئيسي مختلفة عن الصفر.

واضح من التعريف أن تطبيق عدد من التحويلات البسيطة على مصفوفة نظامية يحولها من جديد إلى مصفوفة نظامية وتطبيقها على مصفوفة غير نظامية يحولها أيضاً إلى مصفوفة غير نظامية.

مبرهنة (1.2.5):

إن أي مصـــفوفة نظاميـــة يمكـــن تحويـــلها إلى مصفوفة وحدة. بإجراء عدد من التحويلات البسيطة عليها.

البرهان:

لـــتكن A_n مصفوفة نظامية بإجراء عدد من التحويلات البسيطة على صفوف هذه المصفوفة نحصل على المصفوفة المثلثية التالية:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

بحيـــث تكـــون جميع عناصر القطر الرئيسي $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn}$ مختلفة عن الصفر، نضـــيف إلى الصـــف الأول مـــن المصـــفوفة B الصف الثاني بعد ضربه بالعدد $\frac{-b_{12}}{b_{22}}$ فنحصل على المصفوفة:

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_{n} & 0 & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

ثـــم نضـــيف إلى الصف الأول من المصفوفة B_1 الصف الثالث بعد ضربه بالعدد $\frac{-b_{23}}{b_{33}}$ وإلى الصـــف الـــثاني نضيف الصف الثالث بعد ضربه بـــ $\frac{-b_{23}}{b_{33}}$ فنحصل على المصفوفة:

$$B_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & b''_{14} & \dots & b''_{1n} \\ 0 & b_{22} & 0 & b''_{24} & \dots & b''_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} & \dots & b_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} & \dots & b_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

وبمـــتابعة إجراء التحويلات البسيطة على صفوف المصفوفة السابقة وما ينتج عنها من مصفوفات سنحصل على المصفوفة القطرية.

$$B_{n-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

وبتحويل المصفوفة الأخيرة إلى مصفوفة وحدة يكفي أن نجري التحويلات البسيطة الـــتالية عـــلى صفوفها: نضرب الصف الأول بـــ $\frac{1}{b_{11}}$ والصف الثاني بـــ $\frac{1}{b_{22}}$... وهكذا نضرب الصف n بـــ $\frac{1}{b_{nn}}$

مبرهنة (1.1.6):

إن كل مصفوفة نظامية تكون قابلة للعكس.

البرهان:

بفـــرض أن A مصفوفة نظامية ولنبرهن على وجود معكوس A^{-1} لهذه المصفوفة يمكـــن تحويـــل المصـــفوفة A إلى المصفوفة الواحدية E (حسب المبرهنة 1.2.4) وذلك بإجـــراء عدد من التحويلات البسيطة على صفوف المصفوفة A ولكن وحسب المبرهنة (1.1.4) فـــإن كـــل تحويـــل بســـيط عـــلى صفوف المصفوفةn مكافئ لعملية ضرب هذه المصفوفة من اليسار بمصفوفة بسيطة مناسبة فإذا فرضنا أن مجموعة التحويلات البسيطة والتي تحول المصفوفة A إلى مصفوفة وحدة E هي:

$$D_1, D_2, ..., D_s$$

عندئذ يكون

$$E = D_s D_{s-1} ... D_1 A \tag{1.1.5}$$

وباستخدام الرمز

$$B_A = D_s D_{s-1} ... D_1 \tag{1.1.6}$$

تصبح العلاقة (1.1.5) على الشكل:

$$E = B_A . A \tag{1.1.7}$$

وبهـــذا نكـــون قد برهنا على أنه يوجد للمصفوفة A معكوس من اليسار B_A والذي يحقق العلاقة (1.1.5).

إذا استطعنا البرهان على أن:

$$AB_A . A = E \tag{1.1.8}$$

فإن المصفوفة B_A تكون و بحسب العلاقة (1.1.7) معكوس المصفوفة A أي $B_A = A^{-1}$.

نلاحظ وقبل كل شيء أن المصفوفة B_A هي مصفوفة نظامية وذلك لأنها عبارة عن جداء مصـــفوفات بسيطة وبالتالي فإنه يمكن الحصول على المصفوفة B_A من مصفوفة الوحدة: بإجراء عدد من التحويلات البسيطة عليها.

بضرب طرفي العلاقة (1.1.5) من اليمين بـــ B_A نحصل عليها:

$$B_A . AB_A = EB_A = B_A \tag{1.1.9}$$

وبما أن B_A مصفوفة نظامية إذن وحسب ما برهنه سابقاً والتي تساوي قيمتها قيمة المحـــددة الأساســـية (حســـب الخاصة الثامنة) الآن نضيف إلى الصف الرابع في المحددة الأخيرة الصف الثالث مضروباً بـــ -1 ومن ثم نضيف الصف الثاني مضروباً بـــ-1 إلى الصف الرابع فنحصل على المحددة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

نلاحــظ أنـــه من بين جداءات المحددة السابقة والبالغ عددها 24 جداء يوجد جداء واحد فقط لا يساوي الصفر وهذا الجداء هو:

$$a_{11}\, a_{23}\, a_{32}\, a_{44} = 1(-2)(-2)(4) = 16$$

إن المتــبادلة الموافقـــة لـــلجداء السابق (1,3,2,4) فردية وبالتالي فإن قيمة المحددة السابقة تساوي 16-.

تعريف (1.2.8):

المتممات الجبرية والصفائر (*Algebraic Complement*)

لتكن لدينا المحددة:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ولنأخذ المحددة:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

والـــذي يمكن الحصول عليها من المحددة الأولي بإبدال العنصر a_{ij} بـــ1 بينما بقية عناصر الصف (I) والعمود (j) فنبدلها بأصفار.

إن المحـــددة الأخيـــرة تسمي المتمم الجبري للعنصر a_{ij} ويرمز له بالرمز A_{ij} وأن A_{ij} لا يتعلق إطلاقاً بعناصر i الصف والعمود j في المحددة الأصلية.

الخاصية التاسعة:

قيمة المحددة تساوي المجموع الجبري لجداءات عناصر أحد الصفوف في متمماتها الجـــبرية تحـــول المصفوفة A إلى E. إن إجراء هذه التحولات على المصفوفة (1.1.11) يكـــافئ عمـــلية ضـــرب المصـــفوفة A وكذلـــك أيضـــاً مصفوفة الوحدة E من اليسار بالمصفوفات: $D_1, D_2,...D_S$

حيث نحصل بالنتيجة على المصفوفة المركبة:

$$D_S D_{S-1} \quad D_1 A | D_S D_{S-1} ... D_1 E \tag{1.1.12}$$

وكما رأينا في (1.1.5) و (1.1.10) إن:

$$D_S D_{S-1} ... D_1 A = E \wedge D_S D_{S-1} ... D_1 E = A^{-1}$$

ولهذا فإن المصفوفة (1.1.11) ما هي إلا المصفوفة المركبة:

$$.E / A^{-1} \tag{1.1.13}$$

وهكـــذا فإن بإجراء عدد من التحويلات البسيطة على صفوف المصفوفة المركبة (1.1.11) نحصل على المصفوفة المركبة (1.1.12) والتي يكون فيها إلى اليسار من الخط الفاصل مصفوفة الوحدة E وإلى اليمين معكوس المصفوفةA.

مثال (1.1.17):

من أجل معكوس المصفوفة A التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

نقوم بوضع المصفوفة الواحدية E إلى يمين المصفوفة A السابقة فنحصل على:

$$A \backslash E = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

نقـــوم الآن بإجراء سلسلة من التحويلات البسيطة على صفوف المصفوفة المركبة السابقة إلى أن نحصل في الجزء الأيسر منها على مصفوفة الوحدة كما يلي:-

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \to R_2 - R_1 \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\to R_3 + R_1 \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to R_2 + R_3 \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \frac{1}{2} R_2 \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] = \mathrm{E}/A^{-1}$$

وبذلك يكون:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

القوى الصحيحة للمصفوفة:

بما أنه يمكن ضرب أي مصفوفتين مربعتين لهما نفس المرتبة فإنه من البديهي أن نـــتمكن من ضرب المصفوفة المربعةA بنفسها أي إيجاد مصفوفة الجداء A.A والمصفوفة الناتجة تسمى مربع المصفوفة A مرفوعة للأس n هي:

$$A^n = \frac{A.A...A}{n \text{ مرة}}$$

وهكـــذا فإن للمصفوفة A أس يساوي الواحد أي أن $A=A^1$ أما المصفوفة المرفوعة للأس صفر فتساوي اصطلاحاً مصفوفة الوحدة أي أن:

$A^0 = E$

هذا ويمكن أن نعرف A^{-n} حيث $n \succ 0$ بالشكل: $A^{-n} = (A^{-1})^n$

ومنه ينتج أن: $A^{-n} = (A^n)^{-1}$

حيث A^{-1} هو معكوس المصفوفة المربعةA:

إن القوى الصحيحة لمصفوفة مربعة A تحقق الخاصيتين.

$$A^m.A^n = A^{m+n}$$

$$(A^m)^n = A^{mn} \qquad (2)$$

مثال (1.1.18) :

احسب A^2 وA^3 للمصفوفة A التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 0 & 4 \\ 0 & -9 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال (1.1.18):

إذا كانت المصفوفة A هي:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

فاحسب A^2, A^3, A^6 ثم أوجد بالاستقراء A^n حيث n عدد صحيح:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -12 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = A^3.A^3 = \begin{bmatrix} 7 & -12 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -12 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -24 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}$$

وبالتالي نجد بالاستقراء أن:

$$A^n = \begin{bmatrix} 2n+1 & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}$$

تعريف (1.1.8)

نقول عن المصفوفة المربعة A إنها معدومة القوى من الدرجة n إذا وفقط إذا كان $A^n = 0$ حيث n عدد صحيح موجب.

مثال (1.1.19):

لتكن لدينا المصفوفة Aالتالية:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إن:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وكذلك فإن:

$$A^3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \quad \text{أن:} \quad A^4=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن من تعريف أعلاه نجد أن A معدومة القوة من الدرجة 4 ومن الدرجة 5 ومن الدرجة 6 وهكذا ...

كـــثير حـــدود مصفوفة لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة n، وليكن f(x) كثير حدود اختياري معطي بـــ:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$$

حيث المعاملات $a_0,a_1,a_2,\dots\dots,a_n$ عناصر من مجموعة الأعداد الحقيقية، فنسمي التعبير

$$a_0E+a_1A+a_2A^2+\dots a_nA^n$$

كثير حدود بـــ A ونرمز له بـــ f(A)

نري انه يمكن الحصول على f(A) بالتعويض في كثير الحدود f(x) كل X بـــ A.

كما وأننا نلاحظ بسهولة أن f(A) هو مصفوفة مربعة من نفس مرتبة المصفوفة A في الحالة التي يكون فيها f(A) = 0 فإننا نقول عن المصفوفة A إنها جذر لـــ f(x).

مثال (1.1.20):

لتكن: $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\end{bmatrix}$

وكثير الحدود: $f(x)=-x^3+3x^2-5x-6$ أوجد $f(A)$.

الحل:

إن $f(A)=-A^{-3}+3A^2-5A-6E$

$$A^3=\begin{bmatrix}7&14\\21&-7\end{bmatrix} \quad , \quad A^2=\begin{bmatrix}7&0\\0&7\end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$f(A) = -\begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 21 & -7 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & -14 \\ -21 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ -15 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -24 \\ -36 & 27 \end{bmatrix}$$

ثانياً: المحددات (*Determinants*)

1- تمهيد

لنأخذ جملة معادلتين خطيتين بمجهولين x وy:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= C_1 \\ a_2x + b_2y &= C_2 \end{aligned} \qquad (1.2.1)$$

لنفرض أن هذه الجملة تملك حلاً مشتركاً، إذا ضربنا طرفي المعادلة الأولى بـ b_2 و المعادلة الثانية بـ b_1 ومن ثم نقوم بطرح المعادلة وذلك بعد إجراء عملية الضرب المذكورة سابقاً.

فنحصل على:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = C_1b_2 - C_2b_1$$

لنضرب الآن المعادلة الأولى من الجملة (1.2.1) بـ $-a_2$ والمعادلة الثانية بـ a_1 ومن ثم نجمع المعادلتين الناتجتين فنحصل على:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$$

وبفرض أن $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ عندئذ يكون لدينا:

$$x = \frac{C_1b_2 - C_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad , \quad y = \frac{a_1C_2 - a_2C_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (1.2.2)$$

وهكـــذا نكون قد تمكنا من معرفة الحل المشترك للجملة (1.2.1) بعد أن افترضنا سـلفاً عــلى أن هذه الجملة لها حل مشترك وبذلك فإن مسألة حل الجملة (1.2.1) تصبح مطروحة على الشكل التالي. أما أن تكون الجملة (1.2.1) تملك حلاً مشتركاً وعندها هذا الحل يعطي بالعلاقات (1.2.2) أو أنها لا تملك حلاً مشتركاً وللتخلص من الاحتمال الثاني ينبغي علينا أن نفترض أن العلاقات (1.2.2) تمثل الحل المشترك للجملة (1.2.1) وعندها يكون:

$$\mathrm{a}_1 \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{\mathrm{a}_1 b_2 - \mathrm{a}_2 b_1} + b_1 \frac{\mathrm{a}_1 c_2 - \mathrm{a}_2 c_1}{\mathrm{a}_1 b_2 - \mathrm{a}_2 b_1} = c_1 \frac{(\mathrm{a}_1 b_2 - \mathrm{a}_2 b_1)}{\mathrm{a}_1 b_2 - \mathrm{a}_2 b_1} = c_1$$

و كذلك نجد:

$$\mathrm{a}_2 \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{\mathrm{a}_1 b_2 - \mathrm{a}_2 b_1} + b_2 \frac{\mathrm{a}_1 c_2 - \mathrm{a}_2 c_1}{\mathrm{a}_1 b_2 - \mathrm{a}_2 b_1} = c_2 \frac{(\mathrm{a}_1 b_2 - \mathrm{a}_2 b_1)}{\mathrm{a}_1 b_2 - \mathrm{a}_2 b_1} = c_2$$

نلاحـــظ أن كلـــتا المعادلـــتين في (1.2.1) محققتان فعلاً من أجل الحل المشترك (1.2.2).

إذا كان: $\mathrm{a}_1 b_2 - \mathrm{a}_2 b_1 = 0$

فـــان هـــذه المناقشة لن تقودنا إلى إيجاد الحل المشترك للجملة (1.2.1)، لهذا فان علينا أن نضـع مؤقتاً هذا الاحتمال جانباً.

نلاحظ أن المقام في العلاقات (1.2.2) واحد، أما البسط فهو شبيه بالمقام وإلى حد كـــبير مـــن حيـــث شـــكل كتابـــته فالمقام: $\mathrm{a}_1 b_2 - \mathrm{a}_2 b_1$ يملك تسمية خاصة هي محددة المصفوفة.

$$\begin{bmatrix} \mathrm{a}_1 & b_1 \\ \mathrm{a}_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

نرمز لمحددة هذه المصفوفة بالرمز

$$\det \begin{bmatrix} \mathrm{a}_1 & b_1 \\ \mathrm{a}_2 & b_2 \end{bmatrix} \qquad \text{أو} \qquad \begin{bmatrix} \mathrm{a}_1 & b_1 \\ \mathrm{a}_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

و باستخدام رمز المحددة يمكن كتابة الحل المشترك للجملة (1.2.1) على الشكل:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad , \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad (*)$$

مثال (1.2.1):

باســـتخدام الصـــيغة السابقة للحل المشترك لجملة معادلتين خطيتين أوجد حل جملة المعادلتين:

$$2x-3y=5$$
$$3x+4y=7$$

الحل:

باستخدام العلاقات (*) نجد أن:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{5.4-(-3).7}{2.4-(-3).3}=\frac{41}{17}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{2.7-5.3}{2.4-(-3)3}=\frac{14-15}{8+9}=-\frac{1}{17}$$

نود أن نشير هنا إلى أنه لو كان الأمر يتعلق فقط بجملة معادلتين خطيتين فلما كان هـــناك مـــن حاجة لمفهوم المحددة، غير أن النتيجة التي توصلنا إليها والمتعلقة باستخدام المحـــددة فـــي حـــل جمـــلة معادلتين يمكن تعميمها لأجل جملة مكونة من n معادلة بـــ n مجهولاً.

ومن أجل ذلك سندرس بداية الحالة التي يكون فيها n = 3.

لنفرض إنه لدينا جملة المعادلات:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

لـــنحذف مباشـــرة المجهوليـــن z,y من أجل ذلك نقوم بضرب المعادلة الأولى بـــ $b_2c_3 - b_3c_2$ والمعادلة الثانية بـــ $b_3c_1 - b_1c_3$ والثالثة بـــ $b_1c_2 - b_2c_1$ ومن ثم نجمع المعادلات الناتجة فنحصل على:

$$\begin{aligned} &(a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1)x + \\ &(b_1b_2c_3 - b_1b_3c_2 + b_2b_3c_1 - b_2b_1c_3 + b_3b_1c_2 - b_3b_2c_1)y + \\ &(c_1b_2c_3 - c_1b_3c_2 + c_2b_3c_1 - c_2b_1c_3 + c_3b_1c_2 - c_3b_2c_1)z \\ &= d_1b_2c_3 - d_1b_3c_2 + d_2b_3c_1 - d_2b_1c_3 + d_3b_1c_2 - d_3b_2c_1 \end{aligned}$$

وكمـــا هو واضح من العلاقات الأخيرة فان معاملات كل من y , z تساوي صفراً وإذا كان معامل x لا يساوي الصفر فإن:

$$x = \frac{d_1b_2c_3 - d_1b_3c_2 + d_2b_3c_1 - d_2b_1c_3 + d_3b_1c_2 - d_3b_2c_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1}$$

وبشكل مشابه تماماً يمكن أن نجد قيم Z ,Y:

$$y = \frac{a_1d_2c_3 - a_1d_3c_2 + a_2d_3c_1 - a_2d_1c_3 + a_3d_1c_2 - a_3d_2c}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1}$$

$$Z = \frac{a_1b_2d_3 - a_1b_3d_2 + a_2b_3d_1 - a_2b_1d_3 + a_2b_1d_3 + a_3b_1d_3 - a_3b_2d_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1}$$

نلاحظ أن مقام كل من x , z ,y واحد، نسميه محددة مصفوفة المعاملات:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

ويرمز له بالرمز

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

باستخدام الرمز السابق نستطيع أن نكتب الحل السابق لجملة ثلاث معادلات خطية على الشكل:

$$x = \frac{\begin{bmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}} \quad , \quad y = \frac{\begin{bmatrix} a_1 & d_1 & b_1 \\ a_2 & d_2 & b_2 \\ a_3 & d_3 & b_3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}} \quad , \quad z = \frac{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}}$$

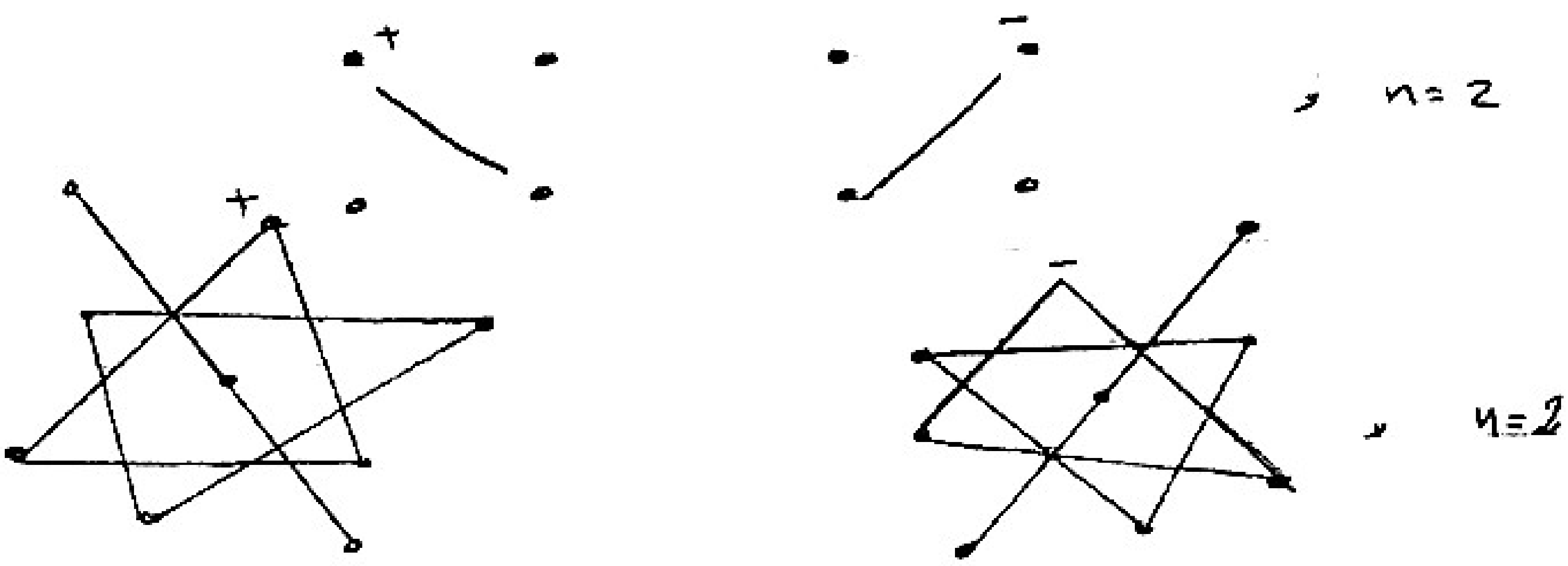
و هكذا نكون قد بينا أن صيغة الحل لجملة معادلتين خطيتين تشبه وإلى حد كبير صيغة الحل لجملة ثلاث معادلات وأن الدور الأساسي في هاتين الصيغتين تلعبه المحددة من المرتبة الثانية.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

والمحددة من المرتبة الثالثة:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

من العلاقتين السابقتين نلاحظ أن قيمة كل من المحددتين من المرتبة الثانية والمرتبة الثالثة تساوي إلى مجموع كل الجداءات الممكنة لعناصر المصفوفة الموافقة وبحيث يكون كل جداء من هذه الجداءات يحوي عنصراً واحداً فقط من كل صنف وعنصراً واحداً من كل عمود في المصفوفة كما وأن كل جداء يكون مسبوقاً بإحدى الإشارتين (+)، (-) والشكلان التاليان يوضحان إشارة كل جداء من قيمة المحددتين من المرتبة الثانية والمرتبة الثالثة.



شكل ص59 مخطوط

والآن اصبح باستطاعتنا الانتقال إلى تعريف المحددة من المرتبة الثالثة بل من المرتبة n.

تعريف (1.2.1):

إن محددة مصفوفة مربعة من المرتبةn (أو محددة من المرتبة n) هو المجموع الجبري لكل الجداءات الممكنة لعناصر المصفوفة والمأخوذة على الشكل التالي:

عنصراً واحداً من كل صف وعنصراً واحداً من كل عمود في المصفوفة، وحيث أن كل من هذه الجداءات يكون مسبوقاً بإحدى الإشارتين (+) أو (−).

نقوم الآن بكتابة المحددة من المرتبة n بالاعتماد على التعريف السابق (1.21) وقبل ذلك نود أن نشير إلى أننا سوف نرتب المضاريب الداخلة في كل جداء من جداءات المحددة بحسب ترتيب الصفوف، أي أنه في كل جداء سيكون المضروب الأول هو العنصر المأخوذ من الصف الأول والمضروب الثاني هو العنصر المأخوذ من الصف الثاني وهكذا.. والمضروب النوني هو العنصر المأخوذ من الصف (n) دون النظر إلى العمود الذي يقع فيه كل من هذه العناصر.

إذن فإن قيمة المحددة من المرتبة n تساوي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum \pm a_{1\alpha 2} a_{2\alpha 2} \dots a_{n\alpha n}$$

حيــث أن الأدلة $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ومن أجل كل جداء من جداءات المحددة هي نفس الأعداد $(1,2,\dots,n)$ ولكن بترتيب مختلف.

سنعرض فيما يلي معلومات بسيطة حول نظرية المتبادلات.

تعريف (1.1.2):

لــتكن لديــنا مجموعة من الأعداد نسمي الترتيب الذي يلي فيه العدد الأكبر العدد الأصــغر بالترتيب الطبيعي، وهكذا فإن $(1,2,3,\dots, n)$ هو الترتيب الطبيعي للأعداد من 1 حتى n،

تعريف (1.2.3):

إن أي ترتيب للأعداد من 1 إلى n نسميه متبادلة* فمثلاً $(2,7,1,5,\dots, n)$ هو متبادلة للأعــداد من 1 إلى n نرمز عادة للمتبادلة بالرمز $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \dots n \\ 2 & 7 & 1 \dots n \end{pmatrix}$ على أن نضع في الصف الأول العناصر مرتبة أما في الصف الثاني فنضع العناصر وفق ترتيب معطى.

ميرهنة (1.2.1):

إن عدد المتبادلات للأعداد من 1إلى n يساوي!n

البرهان:

سنبرهن صحة هذه المبرهنة باستخدام طريقة الاستقراء الرياضي.

يمكن التأكد وبسهولة من صحة البرهان من أجل $n = 1$.

والآن لــنفرض أن المبرهنة صحيحة من أجل $n - 1$ ولنبرهن صحتها من أجل n.

---

* نسمى الدالة المتباينة الغامرة (Bjection) للمجموعة $(1,2,\dots,n)$ على نفسها متبادلة أو تبديل (Permutation).

لنقسم مجموعة المتبادلات للأعداد من 1 إلى n إلى n مجموعة وذلك بحسب موضع العنصر n في المكان الأول، الثاني،....، المكان النوني من المتبادلة.

إن عدد المتبادلات في كل مجموعة سيكون مساوياً لـ (n-1) وبالتالي فإن عدد كل المتبادلات للأعداد من 1 إلى n يكون مساوياً إلى $n(n-1)=n!$.

تعريف (1.2.4):

لتكن $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n$ إحدى متبادلات 1,2,...,n نقول عن زوج العناصر (α_i,α_j) حيث $i \prec j$ إنه يشكل انعكاسا إذا كان $(\alpha_i \succ \alpha_j)$.

إن عدد كل الأزواج التي تشكل انعكاسات في متبادلة ما يسمي عدد الانعكاسات في المتبادلة ويرمز له بالرمز.

$$in\,v(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$$

مثال(1.2.2):

إن: $inv\,(3,5,1,4,2,6,8,7) = 7$

لأن الانعكاسات الموجودة في المتبادلة (3,5,1,4,2,6,8,7) هي:

$$(3,1),(3,2),(5,1),(5,4),(5,2),(4,2),(8,7)$$

تعريف (1.2.5):

تسمى المتبادلة $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ متبادلة زوجية إذا كان عدد الانعكاسات فيها زوجياً، وتسمى متبادلة فردية إذا كان عدد الانعكاسات فيها فردياً.

مثال (1.2.3):

إن المتبادلة (1,2,6,5,4,3) هي متبادلة زوجية لأن:

$$inv(1,2,6,5,4,3) = 6$$

بينما المتبادلة (6,2,4,5,3,1) هي متبادلة فردية لأن:

$$inv\,(6,2,4,5,3,1) = 11$$

تعريف (1.2.6):

نســمى التبديلة مناقلة إذا تركت هذه التبديلة n-2 عنصراً كل في مكانه بينما تبادل بين موضعي العنصرين الآخرين.

فمثلاً- التبديلة التالية مناقلة:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

وتكتب اختصاراً على الشكل (2.5)

مبرهنة (1.2.2):

يمكن كتابة أي مناقلة على شكل جداء عدد فردي من المناقلات لعناصر متجاورة.

البرهان:

بفرض أن لدينا المتبادلة التالية:

$$\left(\mathrm{a}, b \ldots, c, d, e, \ldots \mathrm{f}, g, h, \ldots, k, t\right) \qquad (*)$$

والمناقــلة الــتي تــبادل بيــن موضعي العنصرين h,c لنفرض أن عدد العناصر d,e,...f,g والواقعــة بين h,c هو يساوي m فإذا بدلنا بين موضعي العنصرين d,c ومن ثم بين g,c,f,c,...,e,c نحصل على التبديلة:

$$\left(\mathrm{a}, b, \ldots, d, e, \ldots \mathrm{f}, g, c, h, \ldots, k, t\right)$$

وبذلك نكون قد طبقنا على المتبادلة (*)m مناقلة.

لنقم الآن بإجراء مبادلة بين موضعي h,c فنحصل على المتبادلة.

$$\left(\mathrm{a}, b \ldots, d, e, \ldots \mathrm{f}, g, h, c, \ldots, k, t\right)$$

وأخيــراً لنقم بنقل n إلى المكان الذي يشغله c وذلك لمبادلة h، وعلى الترتيب، مع العناصر d, e,...,f, g فنحصل على المتبادلة:

$$\left(\mathrm{a}, b \ldots, h, d, e, \ldots \mathrm{f}, g, c, \ldots, k, t\right)$$

أي وكما لو أننا أجرينا مناقلة وحيدة (c,h) على المتبادلة (*). غير أنه مما سبق نلاحظ بأننا، ومن أجل الحصول على المناقلة (c, h) من المتبادلة (*) قمنا بإجراء m+1+m=2m+1 مناقلة لعناصر متجاورة، أي أن المناقلة (c, h) تساوي إلى جداء 2m+1 مناقلة لعناصر متجاورة وهذا العدد هو عدد فردي أي:

$$(c, h)= (c, d)\ (c, e)\ldots, (c, f)\ (c, g)\ (c, h)\ (g, h)\ (f, h)\ldots,(e, h)\ (d, h)$$

مبرهنة (1.2.3):

عند إجراء مناقلة على عنصرين متجاورين في متبادلة ما، فإن عدد الانعكاسات في هذه المتبادلة سوف يتغير بمقدار 1.

البرهان:

سنقوم بمقارنة الانعكاسات في كل من المتبادلتين:

$$(a, b\ldots, c, d, e, f, \ldots, k, t)$$
$$(a, b\ldots, c, e, d, f, \ldots, k, t)$$

إذا رمزنا بـ i_1 و i_1' لعدد الانعكاسات في مجموعة الأزواج التي لا تحتوي العنصرين c,d في كلتا المتبادلتين السابقتين على الترتيب وبـ i_2 وi_2' لعدد الانعكاسات في مجموعة الأزواج التي تحوي أحد العنصرين c,d وبـ i_3 و i_3' لعدد الانعكاسات في الزوج (d,c).

وبـ i وi' لعدد الانعكاسات في مجموعة الأزواج التي لا تحوي العنصرين c, d في كلتا المتبادلتين السابقتين على الترتيب وبـ i_2 و i_2' لعدد الانعكاسات في مجموعة الأزواج التي تحوي أحد العنصرين c, d وبـ i_3 و i_3' لعدد الانعكاسات في الزوج (d, c).

وبـ i و i' لعدد الانعكاسات الكلي.

واضح أن:

$$i = i_1 + i_2' + i_3$$
$$i' = i_1' + i_2' + i_3'$$

وكمـــا وأن $i = i_1'$ وكذلك $i_2' = i_2$ وذلك لأن كل عنصر من العنصرين d, e معين بالنســبة لـــبقية العناصر بطريقة واحدة وذلك في كلتي المتبادلتين. وأخيراً نلاحظ بأنه إذا كان $i_3 = 0$ فإن $i_3' = 1$ وإذا كان $i_3 = 0$ فإن $i_3' = 1$ ولهذا فإن:

$$i' - i = i_1' + i_2' + i_3' - i_1' - i_2' - i_3 = i_3' - i_3' = \pm 1$$

نتيجة (1.2.1):

بإجــراء مناقــلة على أي عنصرين متجاورين في متبادلة ما نحصل على متبادلة جديــدة تكــون زوجية إذا كانت المتبادلة الأصلية فردية وتكون فردية إذا كانت المتبادلة الأصلية زوجية.

نتيجة (1.2.2):

بإجــراء مناقــلة على أي عنصرين في متبادلة ما نحصل على متبادلة جديدة تكون زوجية إذا كانت المتبادلة الأصلية فردية وتكون فردية إذا كانت المبتادلة الأصلية زوجية.

مبرهنة (1.2.4):

إن عدد المتبادلات الزوجية لــ n عنصراً يساوي عدد المتبادلات الفردية.

البرهان:

لــنفرض أن عدد المتبادلات الزوجية يساوي i_1 وعدد المتبادلات الفردية يساوي i_2 لــنأخذ مجموعــة كــل المتبادلات الزوجية ولنجري على كل من هذه المتبادلات المناقلة الوحيدة التالية (1, 2) مثلاً فنحصل على متبادلات فردية عددها i_1 وبما أن عدد المتبادلات الفردية يساوي i_2 فإن:

$$i_1 \le i_2 \qquad (1)$$

وبإجــراء نفس المناقلة السابقة (1, 2) على جميع المتبادلات الفردية فإننا سنحصل على i_2 متبادلة زوجية ولما كان عدد المتبادلات الزوجية يساوي i_2 فإن:

$$i_2 \le i_1 \qquad (2)$$

وأخيراً من المتراجحتين (1) و(2) نحصل على أن:

$$i_1 = i_2$$

نتيجة (1.2.3):

بإجراء مناقلة واحدة على كل المتبادلات الزوجية لـــ n عنصراً نحصل على جميع المتبادلات الفردية لهذه العناصر والعكس صحيح.

مـــن الدراسة السابقة كنا قد توصلنا في البداية إلى وضع تعريف أولي للمحددة من المرتـــبة n، غير أنه كان ينقصنا في ذلك التعريف، معرفة طريقة تحديد إشارة كل جداء من جداءات هذه المحددة. أما في الفقرة السابقة فقد تم تنويه إلى أن مجموعة أدلة الأعمدة لأي جـــداء مـــن جداءات المحددة تشكل إحدى متبادلات الأعداد $1, 2, \ldots, n$ وبالتالي فإن المتبادلات الموافقة لجميع جداءات المحددة ما هي إلاّ جميع متبادلات الأعداد $1, 2, \ldots, n$.

بعد هذه المقدمة فقد أصبح بإمكاننا صياغة التعريف النهائي للمحددة من المرتبة n.

تعريف (1.2.7):

إن محددة مصفوفة من المرتبة n (محددة من المرتبة n) هو المجموع الجبري لكل الجداءات الممكنة لعناصر هذه المصفوفة والمأخوذة على الشكل التالي:

عنصـــراً واحـــداً مـــن كـــل صـــف وعنصراً واحداً من كل عمود على أن نرتب مضاريب كل جداء وفق الترتيب الطبيعي للصفوف.

إن الجداءات الموافقة للمتبادلات الزوجية ستكون مسبوقة بإشارة (+) أما الجداءات الموافقـــة للمتـــبادلات الفردية فإشارتها تكون (−) من السهل جداً التأكد من تطابق توزيع الإشـــارات عـــلى جـــداءات المحـــددة من المرتبة الثانية ومن المرتبة الثالثة مع التعريف السابق.

إذن قيمة المحددة من المرتبة n يمكن كتابتها على الشكل:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} (-1)^{inv(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n_{\alpha_n}}$$

حيث $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ تمثل كل متبادلات الأعداد 1, 2, ..., n. إن المضروب $(-1)^{Inv(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)}$ يساوي +1 إذا كانت المتبادلة $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ زوجية ويساوي -1 إذا كانت المتبادلة السابقة فردية.

بعد هذا التعريف سنعرض فيما يلي خواص المحددات:

الخاصة الأولى:

الطريقة العامة لتحديد الإشارات:

من المفيد معرفة طريقة تحديد إشارة الجداء والتي لا تكون فيه المضاريب مرتبة بحسب الترتيب الطبيعي لصفوف المحددة ومن أجل ذلك لنأخذ مثلاً الجداء:

$$a_{\alpha_1 \beta_1} a_{\alpha 2 \beta_2} ... a_{\alpha_n \beta_n}$$

من محددة المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]_n$

إن $(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n)$ و $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ متبادلتان للأعداد 1, 2, ..., n ولمعرفة إشارة الجداء السابق يجب علينا بينّا سابقاً، أن نعيد مضاريبه وفق الترتيب الطبيعي للصفوف، وذلك بإجراء سلسلة من المبادلات بين هذه المضاريب نلاحظ أنه عند المبادلة بين موضعي مضروبين تحصل مناقلة في المتبادلة الموافقة لأدلة الصفوف $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ وكذلك في المتبادلة الموافقة لأدلة الأعمدة $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ وبالتالي فإن عدد الإنعكاسات في كل من المتبادلتين سوف يتغير بمقدار عدد فردي، ومن ثم فإن مجموع الإنعكاسات في المتبادلتين سوف يتغير بمقدار عدد زوجي ولهذا فإن المضروب

$$(-1)^{Inv(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) + Inv(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)}$$

سوف لن يتغير عند المبادلة بين موضعي مضروبين، وبالتالي لن يتغير من أجل أي تغيير في ترتيب المضاريب، مما سبق ينتج أن إشارة الجراء: $a_{\alpha_1 B_1} a_{\alpha_2 B_2} ... a_{\alpha_{1n} B_n}$ هي:

(-1) Inv (∝1 1∝21 … ∝n) + onv (B11 P2, …, Bn

في الحقيقة إذا فرضنا أن $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ هي أرقام الأعمدة بعد ترتيب المضاريب وفق ترتيب الصفوف وباعتبار أن:

$$a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\dots a_{\alpha n\beta_n}=a_{1\gamma_1}a_{2\gamma_2}\dots a_{n\gamma_n}$$

فإننا نستنتج أن:

$$(-1)^{Inv(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)+Inv(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)}=(-1)^{Inv(1,2,\dots,n)+Inv(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)}=(-1)^{Inv(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)}$$

الخاصة الثانية:

إن محددة منقول مصفوفة يساوي محددة المصفوفة الأصلية.

لنأخذ كل الجداءات الممكنة لعناصر المصفوفة الأصلية والمأخوذة على الشكل:

عنصراً واحداً من كل صف وعنصراً واحداً من كل عمود، ثم لنأخذ كل الجداءات الممكنة لعناصر مصفوفة المنقول: عنصراً واحداً من كل صف وعنصراً من كل عمود.

وبمـــا أن أرقام الصفوف في المصفوفة الأصلية هي أرقام الأعمدة في المنقول، أما الأرقام الأعمدة في الأصلية فهي أرقام الصفوف في المنقول فإن الجداء:

$$a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha 2\beta_2}\dots a_{\alpha_n\beta_n}$$

ســيكون أحـــد جـــداءات محددة المصفوفة الأصلية ومحددة المصفوفة المنقولة مع الإشارة.

$$(-1)^{Inv(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)+Inv(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)}$$

نتيجة (1.2.4):

ينـــتج من الخاصة السابقة أن الصفوف والأعمدة في محددة متكافئة من وجهة نظر العمليات على المحددات، أي أن كل خاصة تتحقق من أجل الصفوف سوف تتحقق بدورها مـــن أجل الأعمدة لذلك قد نعمد فيما يلي إلى برهان بعض الخواص والنظريات من أجل الصفوف فقط أو الأعمدة فقط.

الخاصة الثالثة:

فـــي المصفوفة المربعة $A=\left[a_{ij}\right]_n$ إذا كانت جميع عناصر الصف الذي رقمه (i) عبارة عن مجموع حدين. أي إذا كان:

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij} \qquad (j = 1,2,,\ldots,n) \qquad (*)$$

فــإن محــددة هــذه المصــفوفة يكــون مساوياً إلى مجموع محددتين للمصفوفتين المربعــتين A_2, A_1 حيث إن عناصر الصف (i) في A_1 هي الحدود الأولى في العلاقة (*) وعناصــر الصــف (i) فــي A_2 هــي الحــدود الثانية في (*) أما الصفوف الأخرى في المصفوفتين A_1 و A_2 فهي نفس صفوف المصفوفة A أي أن:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{ij}+c_{ij} & \cdots & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{ij} & \cdots & c_{ij} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

البرهان:

إذا رمزنا للمحددة الأولى الواقعة في الطرف الأيسر بـــ Δ نجد:

$$\Delta = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} (-1)^{inv(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1}\ldots(b_{i\alpha_i} + c_{i\alpha_j})\ldots a_{n\alpha_n}$$

$$+$$

$$\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} (-1)^{inv(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2}\ldots b_{i\alpha_i}\ldots a_{n\alpha_n}$$

$$\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} (-1)^{inv(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1}\ldots c_{i\alpha_i}\ldots a_{n\alpha_n}$$

في العلاقة السابقة نلاحظ أن المجموع الأول ما هو إلا قيمة المحددة:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

بينما المجموع الثاني فهو قيمة المحددة:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ملاحظة:

بسـهولة يمكن التأكد من أن الخاصة السابقة تبقى صحيحة من أجل التي يكون فيها عناصر أحد الصفوف مساوياً إلى مجموع عدد من الحدود.

الخاصة الرابعة:

إذا كـانت جميع عناصر أحد الصفوف في محددة ما تملك مضروباً مشتركاً، فإنه يمكن إخراج هذا المضروب خارج إشارة المحددة أي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ma_{il} & \dots & \dots & ma_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

البرهان:

إن قيمة المحددة Δ تساوي:

$$\Delta = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} (-1)^{inv(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots ma_{i\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n}$$

$$m \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} (-1)^{inv(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$$

$$= m\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

الخاصية الخامسة:

محددة مصفوفة مربعة تحوي صفين متماثلين يساوي الصفر.

البرهان:

بفرض أنه لدينا محددة تحوي صفين متماثلين

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} (-1)^{inv(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1}\ldots a_{i\alpha_i}\ldots a_{j\alpha_j}\ldots a_{n\alpha_n}$$

حيث أن:

$$a_{i1} = a_{j1}, a_{i2} = a_{j2}, \ldots, a_{in} = a_{jn}$$

سوف نقسم جميع جداءات المحددة السابقة إلى جزئين، الأول يحوي الجداءات الموافقة للمتبادلات الزوجية والثاني يحوي الجداءات الموافقة للمتبادلات الفردية.

$$\Delta = \underset{\text{الزوجية}}{} \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1}\ldots a_{2\alpha_2}\ldots a_{i\alpha_i}\ldots a_{j\alpha_j}\ldots a_{n\alpha_n}$$

$$\underset{\text{الفردية}}{} \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1}\ldots a_{i\alpha_i}\ldots a_{j\alpha_j}\ldots a_{n\alpha_n}$$

وكما نعلم فإنه بالإمكان الحصول على كل المتبادلات الفردية وذلك بإجراء مناقلة واحدة (α_i, α_j) على جميع المتبادلات الزوجية $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ولهذا فإن:

$$\Lambda = \sum_{k<l} \sum_{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)} a_{1\alpha_1} \ldots a_{k\alpha_k} \ldots a_{l\alpha_l} \ldots a_{n\alpha_n} - \sum_{k<l} \sum_{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)} a_{1\alpha_1} \ldots a_{k\alpha_l} \ldots a_{l\alpha_k} \ldots a_{n\alpha_n}$$

لكن $a_{l\alpha} = a_{k\alpha}$ ، $a_{k\alpha_l}$ ، $a_{l\alpha_k}$ لهذا فإنه ومن أجل كل جداء في المجموع الأول يمكن إيجاد جداء يساويه في المجموع الثاني وبالتالي يكون:

$$\Lambda = 0$$

الخاصية السادسة:

إذا بدلنا بين موضعي صفين في مصفوفة مربعة فإن إشارة المحددة لها هي التي تتغير فقط.

البرهان:

للسهولة سوف نرمز للصفين المتبادلين في المصفوفة المربعة بـ I، II

لنجري الآن مقارنة بين المحددتين

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & I & \cdots \\ \cdots & II & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & II & \cdots \\ \cdots & I & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

من أجل هذا سنأخذ محددة قيمتها تساوي الصفر

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & I+II & \cdots \\ \cdots & I+II & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & I & \cdots \\ \cdots & II & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & II & \cdots \\ \cdots & I+II & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & I & \cdots \\ \cdots & I & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & I & \cdots \\ \cdots & II & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & II & \cdots \\ \cdots & I & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & II & \cdots \\ \cdots & II & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

إن قيمة كل من المحددين الأول والرابع يساوي الصفر وبالتالي فإن مجموع المحددين الثاني والثالث يساوي الصفر وهو ما نريد برهانه.

الخاصة السابعة:

محددة مصفوفة تحوي صفين متناسبين يساوي الصفر.

البرهان:

لنفرض أنه فيا لمصفوفة $A=[a_{ij}]$ عناصر الصف الذي رقمه (i) متناسبة مع عناصر الصف الذي رقمه (j) أي أن:

$$a_{i1}=c\,a_{j1}\quad,\quad a_{i2}=ca_{j2}\quad,\ldots,\quad a_{in}=c_{jn}$$

حيث نفرض أن $c\neq 0$ هو ثابت التناسب، نطبق الآن الخاصة الرابعة من خواص المحددات نجد:

$$|A|=c\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{j1} & \ldots & a_{jn}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{j1} & \ldots & a_{jn}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}=c0=0$$

الخاصة الثامنة:

إن قيمة المحددة لا تتغير إذا أضفنا إلى أحد صفوفه صف آخر بعد ضربه، بعدد ما

البرهان:

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
a_{i1} + ma_{j1} & \cdots & a_{in} + ma_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
a_{j1} + m & \cdots & ma_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

إن للخاصية الثامنة أهمية خاصة كونها تعتبر المفتاح في إيجاد قيمة محددة ما.

مثال (1.2.4):

لإيجاد قيمة المحددة التالية:

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1
\end{vmatrix}
$$

نضيف إلى الصف الثاني الصف الأول مضروباً بـ 1- بعدئذ نضيف إلى الصف الثالث الصف الأول بعد ضربه بإشارة 1-.

أيضاً فنحصل بذلك على المحددة:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

فإنه يوجد معكوس لها يساوي C مثلاً أي أن:

$CB_A = E$

وبضرب طرفي العلاقة (1.1.9) من اليسار بـــ C نحصل على:

$CB_A\,AB_A = CB_A$

وبالتالي: $EAB_A = E$

أي أن: $AB_A = E$

وبذلك نكون قد برهنا على أن: $AB_A = E = B_A . A$

أي أن: $A^{-1} = B_A$

نتيجة (1.1.5):

كل مصفوفة بسيطة تكون قابلة للعكس.

نتيجة (1.1.6):

مهـــم أن نلاحــظ أنه من خلال برهان المبرهنة (1.1.5) لم نقم فقط بالبرهان على وجـــود معكوس لكل مصفوفة نظامية وإنما بيّنا طريقة إيجاد هذا المعكوس فلو فرضنا أن A مصفوفة نظامية، عندئذ يكون بحسب العلاقة (1.1.5)

$$A^{-1} = D_S D_{S-1} \dots D_2 D_1$$

حيث أن S_S ,$D_1 ,D_2 ,\dots,D_{S-1}$ هي المصفوفات البسيطة الموافقة للتحويلات البسيطة على الصفوف والتي تحول المصفوفة A إلى مصفوفة الوحدة E.

$$A \to D_1 A \to D_2 (D_1 A) = D_2 D_1 A \to \cdots \to D_S D_{S-1} \cdots D_2 D_1 A = E$$

وبذلـــك نكون قد توصلنا إلى أنه من أجل إيجاد المصفوفة A^{-1} يكفي أن نقوم بإيجاد المصـــفوفات البســيطة D_1 , D_2 ,...,D_S وذلك من خلال عملية تحويل المصفوفةA إلى

المصفوفة E ومن ثم حساب جداء هذه المصفوفات.

إن ما سبق يقودنا إلى المبرهنة التالية:

مبرهنة (1.1.7):

المصفوفة المربعة A قابلة للعكس إذا وفقط إذا كانت:

$$E=D_m D_{m-1} \dots D_2 D_1 A$$

عملياً ليس هناك حاجة لإيجاد المصفوفات D_i (حيث $i = 1, 2, \dots, s$) كلا على حدة.

من أجل الحصول على معكوس المصفوفة A_n، فإذا وضعنا إلى جانب المصفوفة A_n مصفوفة الوحدة E_n نحصل على المصفوفة المركبة التالية:

$$A/E=\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

نقوم الآن بإجراء سلسلة من التحويلات البسيطة على صفوف المصفوفة المركبة (1.1.11) ذات المرتبة (n,2n).

البرهان:

لنكتب المحددة المفروضة بالشكل:

$$\Delta=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{ij} & & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + 0 + \cdots + 0 \cdots + & \cdots + a_{nj} + \cdots + 0 \cdots 0 + 0 + 0 + & \cdots & \cdots & + a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

حيــث أن كــل عنصر من عناصر الصف (i) عبارة عن مجموع n جداء اعتماداً على الخاصة الثالثة يمكن كتابة المحددة السابقة على شكل مجموعn محددة أي.

$$
\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \cdots +
$$

$$
\cdots + \cdots + \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}
$$

واعتماداً على الخاصة الرابعة نحصل على:

$$
.\Delta = a_{21} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \cdots + a_{ij} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
$$

$$
+ \cdots + \cdots + a_{in} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.
$$

ومنه نجد أن:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{ij}A_{ij} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

هذه الطريقة (أو الخاصة) نسميها طريقة نشر المحددة وفق عناصر أحد صفوفه، وهذه الخاصـــة يمكـــن أن نصفها بالشكل: إن محددة المصفوفة $A = [a_{ij}]_{(n,n)}$ تساوي مجموع حواصل الضرب الناتجة من ضرب عناصر أي صف (عمود) بمتمماتها الجبرية

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (\text{حسب الصف } i)$$

كما أن:

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (\text{حسب العمود } j)$$

إن العلاقات السابقة نسميها مفكوك لابلاس لمحددة المصفوفة A.

الخاصة العاشرة:

لتكن لدينا المحددة:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

والأعداد $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n$

عـــن مجموع جداءات الأعداد $b_1, b_2, \ldots, b_n$ في المتممات الجبرية لعناصر الصف (i) مثلاً، يساوي قيمة محددة تكون فيه الأعداد $b_1, b_2, \ldots, b_n$ موجودة في مكان وجود العناصر a_{i1}, a_{i2}, a_{in} في المحددة المفروضة أي أن:

$$b_1 A_{i1} + b_2 A_{i2} + \cdots + b_n A_{in} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

البرهان:

في الحقيقة أن:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 A'_{i1} + b_2 A'_{i2} + \cdots + b_n A'_{in}$$

حيث $A'_{i1} + A'_{i2} + \cdots + A'_{in}$ هي المتممات الجبرية لعناصر الصف (i) ولما كانت المتممات الجبرية لعناصر الصف (i) غير متعلقة بعناصر هذا الصف، فإن هذه المتممات تكون متساوية للمتممات الجبرية $A_{i1} + A_{i2} + \cdots + A_{in}$ في المحددة الأساسية.

الخاصة الحادية عشر:

إن مجموع جداءات عناصر أحد صفوف المحددة في المتممات الجبرية لعناصر صف آخر يساوي الصفر.

البرهان:

لتكن لدينا المحددة:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

عندئذ وبالاعتماد على الخاصة العاشرة يكون لدينا:

$$b_1A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\cdots+a_{jn}A_{in}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

وذلك لأنه في المحددة الأخيرة يوجد صفان متماثلان.

تعريف (1.2.9):

لتكن لدينا المصفوفة المربعة من المرتبة n $A=\left[a_{ij}\right]_{(n,n)}$ نسمي محددة المصفوفة الناتجة من المصفوفة A بعد حذف الصف (i) والعمود (j) واللذان يحويان العنصر a_{ij} يرمز له عادة بالرمز Δ_{ij}.

الخاصة الثانية عشر:

إن المتمم الجبري A_{ij} يساوي الصغير الموافق Δ_{ij} مضروباً بـ $(-1)^{i+j}$، أي أما أن يكون $-\Delta_{ij}$ أو أن يكون $A_{ij}=\Delta_{ij}$ وذلك حسبما يكون العدد $i+j$ زوجياً أو فردياً.

البرهان:

سنبرهن هذه الخاصة أولاً في الحالة التي يكون فيها $i=j=1$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

وحسب تعريف المحددة فإن:

$$A_{11}=\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)}(-1)^{inv(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)}a_{1\alpha_1}\cdots a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}$$

حيــث أن $a_{11}=1$ ، $a_{1j}=0$ مــن أجل $j=2, 3, \ldots, n$ ، كذلك $a_{i1}=0$ من أجل $i=2, 3, \ldots, n$، لهــذا فــإن الجداءات غير المعدومة في قيمة المتمم الجبري A_{11} هي تلك الموافقــة لــ $a_1=1$ و$(\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ التي تمثل جميع متبادلات الأعداد $2, 3, \ldots, n$ وزيادة على ذلك فإن $a_{11}=1$ لذلك فإن:

$$A_{11}=\sum_{(\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n)}(-1)^{inv(1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}$$

واضح أن: $(1,\alpha_2,\cdots a_n)=ivn(\alpha_2,\alpha_3\alpha_n)$ وذلك لأن الواحد لا يشكل أي انعكاس مع عدد من الأعداد التي تليه في المتبادلة لهذا فإن:

$$A_{11}=\sum_{(\alpha_2,\cdots,\alpha_n)}(-1)^{inv(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\Delta_{11}$$

ولنبرهن الآن صحة الخاصة من أجل قيم اختيارية لــ i و j

$$A_{ij}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ a_{i+1,1} & \cdots & \cdots & a_{i+1,j-1} & \cdots & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

سنضـــع العدد 1 في الزاوية اليسرى العليا من المحافظة على ترتيب بقية الصفوف والأعمـــدة في المحددة، ومن أجل ذلك نقوم بمبادلة الصف (i) وعلى التوالي مع الصفوف التي تسبقة بعد ذلك نقوم بمبادلة العمودز وعلى التوالي مع الأعمدة التي تسبقه. عندئذ فإن إشارة المحددة الناتجة تكون:

$$(-1)^{i-1+j-1}=(-1)^{i+j}$$

إذن:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

وبالتالي واعتماداً على الحالة التي برهناها سابقاً من أجل $i=j=1$ نحصل على:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

مما سبق ومن أجل حساب قيمة محددة من المرتبة n اعتماداً على التعريف يلزمنا حساب n جداء يتألف الواحد منها من n مضروباً، وكل جداء يكافئ (n-1) عملية ضرب ثنائيا، إذن فمن أجل حساب قيمة المحددة بهذه الطريقة يلزمنا إجراء n! (n-1) عملية ضرب فمثلاً من أجل محددة من المرتبة 100 يلزمنا 99 (100!) عملية ضرب أي أكثر بكثير من 10^{153} عملية ضرب وحتى الآن لا يوجد أي حاسوب باستطاعته تنفيذ مثل هذا الرقم من العمليات.

والآن لنحاول الاستفادة من خواص المحددات، فعملية نشر المحددة وفق أحد صفوفها تقودنا إلى حساب قيمةn محددة من المرتبة (n-1) أما إذا كانت بعض عناصر أحد الصفوف مساوية للصفر فإن عدد المحددات من المرتبة (n-1) والتي يجب علينا حساب قيمتها مساوياً لعدد العناصر المختلفة عن الصفر في ذلك الصف، إذن واعتماداً على

خاصـــة جمع أحد الصفوف بعد ضربه بعدد ما إلى صف آخر فإنه بإمكاننا تحويل جميع عناصـــر أحـــد الصـــفوف ما عدا عنصراً واحداً إلى أصفار، وبالتالي فعملية حساب قيمة المحددة من المرتبة n تتحول لحساب قيمة محددة من المرتبة (n-1).

مثال (1.2.5):

أحسب قيمة المحددة:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{3n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(المحددة السابقة هي محددة مصفوفة مثلثية عليا).

إن قيمـــة المحـــددة السابقة تساوي إلى جداء عناصر القطر الرئيسي وذلك لأن هذا الجداء هو الوحيد غير المعدوم من بين جميع جداءات هذه المحددة.

مثال (1.2.6):

لتكن لدينا المحددة:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a_3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

بإضـــافة الصـــف الأول إلى جميـــع الصـــفوف بعد ضربه بـــ (1-) نحصل على المحددة:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 - 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & a_3 - 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n - 1 \end{vmatrix} = (a_2 - 1)(a_3 - 1)\cdots(a_n - 1)$$

لأن المحـــددة الناتجة هي محددة مصفوفة مثلثية عليا وقيمتها جداء عناصر القطر الرئيسي.

مثال (1.2.7):

احسب قيمة المحددة التالية:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

الحل:

لـــو كـــان العـــدد الموجود في الزاوية اليسرى العليا 1 بدلاً من الصفر لاستطعنا وبسهولة واعتماداً على المثال (1.2.6) إيجاد قيمة هذه المحددة.

سنضيف إلى الصف الأول جميع الصفوف الأخرى في المحددة:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

لنطرح الآن الصف الأول من جميع الصفوف الأخرى نحصل على:

$$\Delta_n = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)$$

مثال (1.2.8):

احسب قيمة المحددة:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

الحل:

من المحددة المفروضة نلاحظ أن الأعداد 1,2,3,....,n تزاح بشكل دوري على صفوفها، إذا فإننا إذا أضفنا إلى الصف الأخير جميع الصفوف التي تسبقه نحصل على:

$$\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

والآن فإننا نحصل على أصفار في الصف الأخير إذا طرحنا من كل عمود العمود الذي يسبقه أي (من العمود الأخير ما قبل الأخير، ومن ما قبل الأخير العمود الذي يسبقه ....وهكذا) نحصل على:

$$\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n-1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & n-1 & & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & & \cdots & 1-n & 1 \end{vmatrix}$$

والآن سوف نطرح الصف الأول من جميع الصفوف الباقية:

$$\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^n\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \end{vmatrix}$$

وبنشر المحددة الأخيرة نحصل على:

$$\Delta_n = \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}.(-1)^{n+1}$$

في نهاية دراسة المحددات وخواصها وطرق حسابها نعطي فيما يلي طريقة أخري لحساب معكوس مصفوفة مربعة الوارد في التعريف (1.1.7).

إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة $n\times n$ وكانت A_{ij} المتممات الجبرية للعناصر a_{ij} في المصفوفة A عندئذ نسمي المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad (*)$$

والـــتي عناصـــرها كمـــا أشرنا المتممات الجبرية لعناصر A بمصفوفة المتممات الجـــبرية للمصـــفوفة A (Matrix of Cofactorsfrom A) إن منقول المصفوفة (*) نسيمه المصفوفة المساعدة لـــ A (Adjaint of A) ونرمز لهذه المصفوفة بـــ (adjA) أو $\bar{A}$.

مثال (1.2.9):

لتكن A مصفوفة مربعة معرفة كالآتي، أوجد المصفوفة المساعدة.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل :

نوجد مصفوفة المتممات الجبرية للمصفوفة A.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -8 \quad , \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = +2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \quad , \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14$$

$$A_{23} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \quad , \quad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad , \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8$$

إن مصفوفات المتممات الجبرية للمصفوفةA هي:

$$\begin{bmatrix} -18 & 2 & 4 \\ -11 & 14 & 5 \\ -10 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

و المصفوفة المساعدة لـــ A هي:

$$adj\ A = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

تمهيدية (Lemma):

لتكن D مصفوفة بسيطة، عندئذ أيا كانت المصفوفة A فإن:

$$|D.A| = |D|.|A|$$

البرهان:

لنجري العمليات الصفية التالية على مصفوفة الوحدة E:

(i) نضرب صفاً بثابت ما k # 0

(i i) نبادل بين الصفين.

(i i i) نضيف مضاعف أحد الصفوف إلى صف آخر.

لـــتكن D_1 , D_2 , D_3 هي المصفوفات البسيطة الناتجة عن تطبيق التحويلات السابقة على الترتيب على مصفوفة الوحدة E عندئذ نجد استناداً إلى خواص المحددات:

$$|D_1| = k|E| \quad , \quad |D_2| = -|E| = -1 \quad , \quad |D_3| = |E| = 1$$

اســتناداً إلى المبرهنة (1.1.5) نجد أن D_I A مطابقة للمصفوفة التي نجدها بتطبيق العملية المناظرة على A ، ومنه نجد واستناداً إلى خواص المحددات أيضاً.

$$|D_1 A| = k|A| = |D_1||A| \ , \ |D_2 A| = -|A| = |D_2||A| \ ,$$
$$|D_3 A| = |A| = 1.|A| = |D_3|.A$$

وبذلك يتم المطلوب.

مثال (1.2.10):

لتكن المصفوفة B لـ : $B = D_n D_{n-1} \ldots D_2 D_1 A$

حيث $1 \le i \le n, D_i$ مصفوفات بسيطة. بيّن أن:

(i) $|B| = |D_n||D_{n-1}|\cdots|D_2||D_1||A|$

(i i) تكون $|B| \neq 0$ إذا وفقط إذا كانت $|A| \neq 0$

الحل:

(i) استناداً إلى التمهيدية السابقة نجد: $|D_1 A| = |D_1|.|A|$

لذا نجد بالاستقراء أن:

$$|B| = |D_n.D_{n-1}\cdots D_2.D_1 A| = |D_n|.|D_{n-1}|\cdots|D_2||D_1|.|A|$$

(i i) مـــن التمهيدية السابقة نجد أن $|D_i| \neq 0$ مهما تكن. لذا فإن $|B| \neq 0$ إذا وفقط إذا كانت $|A| \neq 0$.

مبرهنة (1.2.5):

لتكن A وB مصفوفتين مربعتين من نفس المرتبة عندئذ يكون $|A.B| = |A|.|B|$

البرهان:

إذا كانت المصفوفة A شاذة فعندئذ: $|A.B| = 0 = |A|.|B|$

إذا كانت A غير شاذة ، عندئذ استناداً إلى العلاقة (1.1.5) نجد أن:

$$A = D_n D_{n-1}\cdots D_2 D_1 E$$

حيث $1 \le i \le n\ D_i$ هي مصفوفة بسيطة ومنه نجد:

$$|A| = |D_n||D_{n-1}|\cdots|D_2|.|D_1||E|$$
$$|A.B| = |D_n.D_{n-1}\cdots D_2.D_1.E.B| = |D_n|.|D_{n-1}|\cdots|D_2||D_1|.|B| = |A|.|B|$$

مبرهنة (1.2.6):

إذا كانت A مصفوفة مربعة، فعندئذ:

$$A.(\mathrm{adj}A) = (\mathrm{adj}A).A = |A|.E$$

حيث E مصفوفة الوحدة.

البرهان:

لتكن $A = [\mathrm{a}_{ij}]$ مصفوفة مربعة ولتكن

$$A.(\mathrm{adj}A)|b_{ij}|$$

إن الصف i في المصفوفة A هو:

$$(\mathrm{a}_{i1}, \mathrm{a}_{i2}, \cdots, \mathrm{a}_{in}) \qquad (\mathrm{i})$$

وبمـــا أن b_{ij} A هي منقول مصفوفة المتممات الجبرية المرافقة لـــ A فإن العمود j من $adj\ A$ هو منقول المتممات الجبرية للصف j من A:

$$[A_{j1}, A_{j2}, \cdots A_{jn}]^{T} \qquad (\mathrm{ii})$$

إن b_{ij} أي العنصر ij في $A.(\mathrm{adj}\ A)$ يمكن إيجاده بضرب (i) و(ii):

$$b_{ij} = \mathrm{a}_{i1}A_{j1} + \mathrm{a}_{i2}A_{j2} + \cdots + \mathrm{a}_{in}A_{jn}$$

واستناداً إلى الخاصة (11) في المحددات، نجد أن:

$$b_{ij} = \begin{cases} |A| \ \text{if} \ i = j : \text{كان} & \text{إذا} \\ 0 \ \text{if} \ i \neq j : \text{كان} & \text{إذا} \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} |A| \\ 0 \end{matrix}\right\} = b_{ij} \qquad \begin{matrix} i = j \ \text{عندما} \\ i \neq j \ \text{عندما} \end{matrix}$$

وبالـــتالي فـــإن $A(\mathrm{adj}\ A)$ هـــي المصفوفة القطرية التي كل عنصر من عناصر قطرها الرئيسي يساوي محددة A أي $|A|$ وبعبارة أخرى فإن:

$$A.(\mathrm{adj}\ A) = |A|.E$$

ونجد بصورة مماثلة أن:

$$A.(adj\ A)=|A|.E$$

مبرهنة (1.2.7):

إن الشــرط الــلازم والكــافي ليكــون للمصفوفة المربعةA معكوس هو أن تكون محددتها لا تساوي الصفر.

البرهان:

لزوم الشرط: لنفرض أن معكوس المصفوفة A هو A^{-1} عندئذ يكون وحسب العلاقة (1.1.2).

(*) $A.A^{-1}=E$ حيث E مصفوفة الوحدة.

واستناداً إلى المبرهنة (1.2.5) نجد أن:

$$|A.A^{-1}|=|A|\ .|A^{-1}|$$

وبما أن $|E|=1$ فإنه من (*) نجد:

$$|A.A^{-1}|=|A|\ .\ |A^{-1}|=1\Rightarrow|A|\neq0$$

كفايــة الشــرط: إن العلاقــة A . B = E تعني أن جداء الصف i من المصفوفة A بالعمود j من المصفوفة B يساوي الصفر عندما يكون $i\neq j$ (خاصة 11 من المحددات) وهــذه الخاصــة محققة من أجل المصفوفة $adj\ A$ والتي هي عبارة عن منقول مصفوفة المتممات الجبرية لعناصر المصفوفةA وفق ترتيبها الطبيعي.

واستناداً إلى المبرهنة (1.2.6) نجد أن:

$$A(adj\ A)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} |A| & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & |A| & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & |A| \end{bmatrix} =$$

$$|A|.E \;\Rightarrow\; A(adj\ A)=|A|.E \qquad (**)$$

وبما أن $|A| \neq 0$ فإنه من العلاقتين (*) و(**) نستنتج أن:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj\ A$$

أي أن:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & & & \\ \frac{A_{n1}}{|A|} & \frac{A_{n2}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix}$$

مثال (1-2-11):

أوجد معكوس المصفوفة A حيث:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

الحل:

إن محددة A: $|A|=-2\neq 0$ واستناداً للمبرهنة السابقة فإن A قابلة للعكس. نوجد المصفوفة المساعدة:

إن عناصر المصفوفة المساعدة هي (انظر المثال (1.2.9)).

$$A_{11}=-2 \quad , \quad A_{12}=-1 \quad , \quad A_{13}=2$$
$$A_{21}=0 \quad , \quad A_{22}=0 \quad , \quad A_{23}=-2$$
$$A_{31}=0 \quad , \quad A_{32}=-1 \quad , \quad A_{33}=0$$

ومنه نجد أن:

$$adj\ A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & +\frac{1}{2}\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

مثال (1.2.12):

بيّن أنه إذا كانت المصفوفة A قابلة للعكس فإن:

$$|A^{-1}|=|A|^{-1}$$

الحل:

بما أن قابلة للعكس فإن: $A.A^{-1}=A^{-1}.A=E$ حسب التعريف (1.1.7) وبالتالي

فإن:

$$|A^{-1}.A| = |E| = 1 \Rightarrow |A^{-1}|.|A| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = |A|^{-1}$$

نتيجة:

في المبرهنة (1.2.6) بينا أن:

$A.(\mathrm{a}dj\ A) = |A|.E$ من هذه المساواة يمكن أن نستنتج وبأخذ محددة طرفي العلاقة السابقة:

$$|A.(\mathrm{a}dj\ A)| = |A|^{n}.|E| \Rightarrow |A.|\partial dj\ A|| = |A^{n}|$$

فإذا كانت $|A| \neq 0$ فإن:

$|\mathrm{a}dj\ A| = |A|^{n-1}$ (حيث A مصفوفة مربعة من المرتبة n)

مثال (1.2.13):

لتكن A هي المصفوفة المربعة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

أوجد $A\ .\ (\mathrm{a}dj\ A)$ ثم تحقق من صحة النتيجة السابقة:

الحل:

إن $adj\ A$ هي المصفوفة:

$$adj\ A=\begin{bmatrix}6 & 1 & -5\\ -2 & -5 & 4\\ -3 & 3 & -1\end{bmatrix}$$

$$A(adj\ A)=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 1 & -5\\ -2 & -5 & 4\\ -3 & 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & 0 & 0\\ 0 & -7 & 0\\ 0 & 0 & -7\end{bmatrix}=-7E$$

إن $\det A=-7$ ‎ ‎ ‎ $|adjA|=49$ ومنه نجد أن:

$$|adj\ A|=|A|^2$$

مثال (1.2.14):

إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين فبين أن:

$$adj(A.B)=(adj\ B)(adj\ A)$$

الحل:

لنأخذ الجداء: $A.B.adj\ AB$ فنجد أن:

(حسب المبرهنة 1.2.6) ‎ ‎ $AB\ \ adj\ AB=|A.B|.E$

$$=|A|.|B|.|E|=(adj\ AB)\,A.B$$

وبما أن:

$$AB\ adj\ B\ adj\ A=A(B\ adj\ B).adj\ A=$$
$$A\,(|B|.E)\ adj\ A=|B|\,(A adj\ A)=|B|.|A|.E$$

فإننا نجد:

$$AB\ adj\ A\ B=A\ B\ adj\ B\ adj\ A$$
$$\Rightarrow A\ dj\ AB=adj\ B.adj\ A$$

تعريف(1.2.9):

إذا كـــانت A و B مصـــفوفتين من نفس المرتبة، فإننا نقول إن المصفوفةB تشابه

المصفوفة A (B is similar to A) إذا وجدت مصفوفة قابلة للعكس P بحيث أن:

$$B = P^{-1}AP \qquad (i)$$

إن المعادلة (i) يمكن أن نكتبها بالشكل:

$$A = PBP^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{-1}BP^{-1} \qquad (ii)$$

فإذا وضعنا في (ii) $P^{-1}=Q$ نجد أن: $A = Q^{-1}BQ$

والـــتي تعني أن المصفوفة A تشابه المصفوفة B، بناء على ذلك فإن تشابه A إذا وفقط إذا كانت A تشابه B أو نقول اختصاراً إن B و A متشابهتان.

إن تشـــابه المصفوفات له كثير من الخواص العامة المشتركة فمثلاً إذا كانت A,B، مصفوفتين متشابهتين فعندئذ B و A لهما نفس قيمة المحددة، لأنه إذا كانت

$$\begin{aligned} B = P^{-1}AP &\Rightarrow \det B = \det\left(P^{-1}AP\right) \\ &= \det\left(P^{-1}\right)\det A \det p \\ &= \frac{1}{\det P}\det A.\det P = \det A \end{aligned}$$

تعريف (1.2.10): نقول عن مصفوفتين A,B من نفس السعة متساويتان (equal) إذا ملكتا عناصراً داخلية متساوية (أي العناصر المتقابلة متساوية).

مثال(1.2.15):

لتكن:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

إن $A \neq C$ لأنهما مختلفان في السعة وكذلك $B \neq C$ و $A \neq B$ أيضاً.

تعريف (1.2.11):

نقـــول إن المصـــفوفتين A,B من المرتبة m×n إنهما متكافئتان إذا وجدت مصفوفة مـــربعة Q مـــن المرتـــبة m×m وقابلة للعكس ومصفوفة مربعة p من المرتبة n×n وقابلة

للعكس بحيث أن:

B = QAP

مثال:

بيّن أن المصفوفتين A,B التاليتين متكافئتان:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 4\\ 5 & -1 & 6\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}29 & -22 & 9\\ 63 & -48 & 18\end{bmatrix}$$

نلاحــظ أن المصفوفتينA,B من نفس المرتبة 3×2 استناداً للتعريف يجب علينا أن نبحث عن مصفوفتينQ من المرتبة 2×2 وP من المرتبة 3×3.

إذا أخذنا $Q=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -2 & 1\\ 3 & -3 & 2\end{bmatrix}$$

نجد أن:

$$Q.A.P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3 & 4\\ 5 & -1 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -2 & 1\\ 3 & -3 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7 & -4 & 10\\ 15 & -3 & 18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -2 & 1\\ 3 & -3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}29 & -22 & 9\\ 63 & -48 & 18\end{bmatrix}=B$$

و المصفوفتان متكافئتان:

تمارين:

1- احسب كلاً من الجداءات التالية:

$$(a)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & B \\ \gamma & \sigma \end{bmatrix} \quad , \quad (b)\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(C)\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

2- احسب:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}^5 \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^3 \quad , \quad \begin{bmatrix} Cos\alpha & -Sin\alpha \\ Sin\alpha & Cos\alpha \end{bmatrix}^n$$

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix}^n \quad , \quad \begin{bmatrix} k & 1 \\ 0 & k \end{bmatrix}^n \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$$

3- إذا علمت أن مجموع عناصر القطر الرئيسي في مصفوفة مربعة نسميه أثر المصفوفة (Trace of a matrix) فبين أن أثر المصفوفة A.B يساوي المصفوفة B.A.

4- كيف يتغير الجداء A.B للمصفوفتين A وB إذا:

أ) بادلنا بين موضعي الصفين i وj في المصفوفة A.

ب) إذا أضفنا إلى الصف i في المصفوفة A الصف j بعد ضربه بالعدد B.

ج) بادلنا بين موضعي العمودين i وj في المصفوفة B.

د) أضفنا إلى العمود i في المصفوفة B العمود j بعد ضربه ما بعدد k.

5- أوجد كثيرة الحدود $f(x)=3x^2-2x+5$ بالنسبة للمصفوفة

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

6- بين أن المصفوفة $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تحقق المعادلة التالية:

$$x^2 = (a+d)x - ad - bc = 0$$

7- برهن أن العلاقة AB - BA=E لا تتحقق من أجل أي مصفوفتين A,B.

8- أوجــد كل المصفوفات المربعة من المرتبة الثانية والتي مربع كل منها يساوي الصفر.

9- أوجــد كل المصفوفات المربعة من المرتبة الثانية والتي مربع كل منها يساوي مصفوفة الوحدة.

10- أوجد معكوس كل من المصفوفات التالية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Cos\alpha & -Sin\alpha \\ Sin\alpha & Cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \cdots & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11- حل المعادلات المصفوفية التالية:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}.x=\begin{bmatrix}3 & 5\\5 & 9\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2 & -1\\5 & -2\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}14 & 16\\9 & 10\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\4 & -5 & 2\\5 & -7 & 3\end{bmatrix}x\begin{bmatrix}9 & 7 & 6\\1 & 1 & 2\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\18 & 12 & 9\\23 & 15 & 11\end{bmatrix}$$

12- أوجد عدد الانعكاسات في كل من المتبادلات التالية:

(1,3,5,7,9,2,4,6,8)

(9,8,7,6,5,4,3,2,1)

(2,5,8,1,4,7,3,6,9), (7,5,4,6,1,2,3,9,8)

13- عين كلاً من k و t في المتبادلات التالية حتى تكون فردية، زوجية.

(k,3,4,7,t,2,6,6) , (7,4,3,k,t,8,5,2)

(4,8,k,2,5,t,1,7) , (0,3,4,k,7,t,2,1,)

14- بين أياً من الجداءات التالية يمكن أن يكون حداً في محددة من المرتبة السابقة مع إشارة كل منها.

(i) $a_{43}\, a_{53}\, a_{63}\, a_{15}\, a_{23}\, a_{34}\, a_{71}$

(ii) $a_{23}\, a_{67}\, a_{54}\, a_{16}\, a_{35}\, a_{41}\, a_{72}$

(iii) $a_{15}\, a_{28}\, a_{74}\, a_{36}\, a_{61}\, a_{43}$

15- حدد كلاً من α و β حتى تكون الجداءات التالية حدوداً في محددة من المرتبة السادسة:

$$\left\{\begin{array}{l}a_{62}\, a_{35}\, a_{\alpha 3}\, a_{44}\, a_{\beta 6}\, a_{21}\\ a_{1\alpha}\, a_{25}\, a_{44}\, a_{6\beta}\, a_{52}\, a_{31}\end{array}\right.$$ مسبوقة بإشارة (−)

$$\left\{\begin{array}{l}a_{63}\, a_{16}\, a_{5\beta}\, a_{45}\, a_{2\alpha}\, a_{31}\\ a_{\alpha 3}\, a_{21}\, a_{34}\, a_{13}\, a_{\beta 6}\, a_{62}\end{array}\right.$$ مسبوقة بإشارة (+)

16- أوجد قيمة كل من المحددسات التالية اعتماداً على التعريف:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

17- أوجد قيمة المحددات التالية بطريقة النشر:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & 1 & b \\ 3 & 2 & 1 & c \\ 1 & 2 & 3 & d \end{bmatrix}$$ وفق العمود الرابع

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ وفق العمود الأول

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ a & b & c & d \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ وفق الصف الثالث

18- أوجد معامل x في منشوري المحددتين.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 & 5 & 1 \\ 10 & 1 & 1 & 8 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -3 & x \\ 7 & -1 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

19- أوجد قيمة كل من المحددات التالية:

$$\begin{bmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & & x & a \\ a & a & \cdots & & a & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & na \\ a & a & \cdots & \cdots & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ a & a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & a & a+x_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & \cdots & a+x_{n-1} \end{bmatrix}$$

الفصل الثاني

جملة المعادلات الخطية

System of Linear equations

1- تمهيد:

إن حـــل كثير من المسائل الرياضية، وفي الميكانيك والفيزياء وفي الاقتصاد يؤول إلى حـــل جمـــلة معادلات من الدرجة الأولي ذات عدة مجاهيل، أو كما جرت العادة على تســـميتها جملة معادلات خطية (تسمية معادلة خطية من الدرجة الأولي أخذت من الهندسة التحليـلية حيث معادلة بمجهولين من الدرجة الأولي $a x + by = c$ تعين خطاً مستقيماً على سطح مستوي).

ومـــن أجـــل الدراسة العامة لنظرية جملة المعادلات الخطية يلزمنا أن نتعرف إلى مفهوم المتجه العددي ذي البعد n أي المتجه الذي له n مسقطاً على جملة محاور مختارة.

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)$$

حيث المساقط $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ معينة بشكل وحيد نسميها مركبات المتجه a.

وكما نلاحظ هنا فإن أي متجه يعين بدلالة مركباته (مساقطه).

تعريف(2.1.1):

إن أي جمـــلة من n عدد $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ من حقل عددي k نسميها متجه عددي من البعد n ،أما الأعداد $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ فتسمى مركبات (مساقط) المتجه العددي.

α_1 نســـميها المركبة الأولي، α_2 المركبة الثانية وهكذا ... α_n المركبة ذات المرتبة n أو المركبة النونية، سوف نرمز للمتجهات العددية بالأحرف ...,a, b, c

إن أي متجه يمكن أن نكتبه بواسطة مركباته، أما على الشكل $a = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)$ وعندها يسمى a متجه الصف (Row vector) أو على الشكل:

$$a \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

ويسمي عندها متجه العمود (Column Vector)

تعريف (2.1.2):

يكـون المتجهان العدديان $a=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)$ و $b=(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n)$ متساويين

إذا وفقط إذا كان:

$$\alpha_2=(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n) \quad , \quad \alpha_1=\beta_1$$

تعريف (2.1.3):

إن المجموع a + b للمتجهين:

$$a=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n) \quad ، \quad b=(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n)$$

هو المتجه C حيث:

$$C=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)$$

تعريف (2.1.4):

إن جداء المتجه $a=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)$ بالعدد k من الحقل k هو المتجه:

$$ka=(k\alpha_1,k\alpha_2,\cdots,k\alpha_n)$$

بعـد هـذه المقدمة البسيطة والتعاريف المتعلقة بها، سنتطرق فيما يلي إلى مفهوم جملة المعادلات الخطية وحلولها.

لقـد تـم التعرف في المرحلتين الإعدادية والثانوية على طريقة حل جملة معادلات خطيـة والتي كان فيها عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل ويساوي كحد أقصى (4) أما الآن فإننا سنقوم بدراسة الجمل التي تحوي أي عدد من المعادلات وأي عدد من المجاهيل، وبالطـبع ليس بالضرورة أن يكون عدد المعادلات مساوياً لعدد المجاهيل، سوف نعتبر أن معـادلات المعـادلات الـتي سنقوم بدراستها مأخوذة من حقل عددي ما k وقيم المجاهيل ستكون من نفس الحقل k.

إن المعادلة ذات الشكل:

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\cdots+\alpha_nx_n=b \qquad (2.1.1)$$

حيث $x_1, x_2, \cdots, x_n$ مجاهيل هذه المعادلة و $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ تسمى معاملات هذه المعادلة، أما العدد b يسمى المقدار الحر لهذه المعادلة.

تعريف(2.1.5):

إن المتجه العددي:

$\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n)$ يعتبر حلاً للمعادلة (2.1.1) إذا تحولت هذه المعادلة إلى مساواة صحيحة بعد إبدال مجاهيلها x_i بالمركبات الموافقة β_i حيث $i = 1,2,\cdots,n$.

مثال (2.1.1):

إن المعادلة $2x_1 - 5x_2 = 7$ هي معادلة خطية بمجهولين أما المعادلة $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ فهي معادلة خطية بثلاثة مجاهيل، إن المتجه $\beta = (1,-1,1)$ يعتبر حلاً للمعادلة $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$.

لأن هذه المعادلة تتحول إلى مساواة صحيحة بعد إبدال المجاهيل x_1, x_2, x_3 بالمركبات (1,-1,1) على الترتيب كذلك فإن المتجهين(0,0,0) و (-1,1,1) يعتبران حلين لها.

1- جملة المعادلات الخطية (System of linear equation):

لتكن لدينا m معادلة خطية ذات المجاهيل $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ وبفرض أن المطلوب إيجاد الحلول المشتركة لجميع هذه المعادلات، ففي هذه الحالة يقال إنه لدينا جملة مكونة من m معادلة خطية ذات n مجهول، أو جملة خطية من m معادلة بـ n مجهول.

إن جملة m معادلة خطية ذات n مجهول تكتب على الشكل التالي:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &: \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned} \qquad (2.1.2)$$

حيث $x_1, x_2, \cdots, x_n$ هي المجال و $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}$ و a_{m1}, a_{m2}, a_{mn} و

$b_1, b_2, \cdots, b_m$ أعداد من الحقل k.

إن الأعــداد a_{m1}, a_{m2}, a_{mn} هي معاملات الجملة، أما الأعداد $b_1, b_2, \cdots, b_m$ فهي المقادير الحرة.

مــن الجمــلة (2.1.2) الســابقة، نلاحــظ أن المعــاملات الموافقــة لــلمجهول $(j = 1, x_j, 2 \cdots, n)$ والمقادير الحرة أيضاً في هذه الجملة تكون متجهات عددية من البعد m.

$$a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad : \quad (J = 1, 2, \cdots, n) \quad , \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

مــن تعريف مساواة المتجهات العددية ومجموع المتجهات وجداء متجه بعدد ينتج أن:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \quad \Rightarrow x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = b \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

إن المعادلة:

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = b \qquad (2.1.2)$$

ندعى بالصيغة المتجهة لجملة المعادلات الخطية (2.1.2)

تعريف (2.1.6):

إن أي مــتجه عــددي من القياس (البعد) n $l = [l_1, l_2, \cdots, l_n]$ يدعى حلاً لجملة المعــادلات الخطيــة (2.1.2) إذا كــان هذا المتجه حلاً لكل معادلة من معادلات الجملة (2.1.2).

نذكر بأن جملة المعادلات التي تملك حلاً واحداً على الأقل تسمى متشاركة متوافقة

Consistent ، أمـــا الجمـــلة الـــتي لا تملك أي حل فإنها تسمى جملة غير مشتركة (غير مـتوائمة Inconsistent) أي أن أي جمـــلة مشتركة من المعادلات تملك أما حلاً واحداً أو مجموعة ما من الحلول المختلفة.

مثال (2.1.2):

إن جملة المعادلتين الخطيتين

$$(2.1.3)\qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 14 \end{aligned}$$

هي جملة مشتركة، إن المتجه $\ell = [1,4]$ هو حل لهذه الجملة.

مثال(2.1.3):

الجملة الخطية التالية:

$$(2.1.4)\qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

جملة غير مشتركة، لأنه لا يوجد أي متجه $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ والذي يمكن أن يكون وفي وقت واحد حلاً لمعادلتي الجملة(2.1.4).

مثال(2.1.4):

إن الجملة:

$$(2.1.5)\qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 5x_1 + 5x_2 &= 15 \end{aligned}$$

لهـــا الحلين $\ell_1 = (1,2)$ و $\ell_2 = (2,1)$ وكذلك مجموعة لانهائية من الحلول. فالمتجه $c = (c, 3-c)$ يحقق هذه الجملة وذلك مهما يكن العدد c من الحقل العددي k.

مبرهنة (2.1.1):

إذا كـــان لجمـــلة معادلات خطية حلين مختلفين، فإن العدد الكلي لحلول هذه الجملة يكون غير منته.

البرهان:

لتكن لدينا المعادلات الخطية ذات الـ n مجهولاً الواردة في (2.1.2) التالية:

$$x_1\mathrm{a}_1 + x_2\mathrm{a}_2 + \cdots + x_n\mathrm{a}_n = b$$

وبفرض أن هذه الجملة تملك الحلين المختلفين التاليين:

$\ell = [\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n]$ و $C = [c_1, c_2, \cdots, c_n]$ عندئذ فإن المتجه:

$$d = tc + (1-t)\ell$$

يكون حلاً للجملة (2.1.2) حيث أن t عدد ما من الحقل k في الحقيقة أن:

$$d = [tc_1 + (1-t)\ell_1, tc_2 + (1-t)\ell_2, \cdots, tc_n + (1-t)\ell_n]$$

وبتعويض d في المعادلة المفروضة نجد أن:

$$\begin{aligned}
&(tc_1 + (1-t)\ell_1)\mathrm{a}_1 + (tc_2 + (1-t)\ell_2)\mathrm{a}_2 + \cdots + (tc_n + (1-t)\ell_n)\mathrm{a}_n \\
&= t(c_1\mathrm{a}_1 + c_2\mathrm{a}_2 + \cdots + c_n\mathrm{a}_n) + (1-t)(\ell_1\mathrm{a}_1 + \ell_2\mathrm{a}_2 + \cdots + \ell_n\mathrm{a}_n) \\
&= tb + (1-t)b = tb + b - tb = b
\end{aligned}$$

وذلك لأن:

$$\begin{aligned}
c_1\mathrm{a}_1 + c_2\mathrm{a}_2 + \cdots + c_n\mathrm{a}_n &= b \\
\ell_1\mathrm{a}_1 + \ell_2\mathrm{a}_2 + \cdots + \ell_n\mathrm{a}_n &= b
\end{aligned}$$

يكـون المتجهان C, L حلين للمعادلة المفروضة. وهكذا نكون قد برهنا أن المتجه $d = tc + (1-t)\ell$ حل للمعادلة المفروضة.

بقي أن نبرهن أنه إذا كان $t_1 \neq t_2$ فإن:

$d_1 = t_1c + (1-t_1)\ell$ و $d_2 = t_2c + (1-t_2)\ell$ حلان مختلفان للجملة(2.1.2)

لنفرض أن $d_1 = d_2$

عندئذ يكون:

$$i = 1,2,\ldots,n \quad ; \quad t_1c_i + (1-t_1)\ell_i = t_2c_i + (1-t_2)\ell_i$$

وبالتالي يكون:

$$c_i(t_1-t_2)=\ell_i(t_1-t_2) \quad ; \quad i=1,2,\dots,n$$

وبما أن $t_1 \neq t_2$ نستنتج من المساواة السابقة أن $c_i=\ell_i$ حيث $i=1,2,\dots,n$

أي أن $[c_1,c_2,\cdots,c_n]=[\ell_1,\ell_2,\cdots,\ell_n]$.

مما يـناقض كون ℓ,c حلين مختلفين للجملة المفروضة إذن $d_1 \neq d_2$ وبما أن t يمكـن أن يكـون أي عــدد من الحقل k ، فإننا نستنتج بأن الجملة المفروضة تملك عدداً لانهائياً من الحلول المختلفة.

2- جملة المعادلات الخطية المشتركة (System of Linear Consistent Equation):

إن السـؤال الهام الذي يتوجب علينا الإجابة عليه عند حل أي جملة معادلات خطية هو:

هل الجملة المدروسة هي جملة مشتركة أي لها حلاً مشتركاً ، أم لا؟

لتكن لدينا جملة المعادلات (2.1.2) أن المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \partial_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

والمؤلفــة مــن معــاملات الجمــلة (2.1.2) تسمى مصفوفة معاملات الجملة، أو مصفوفة الأمثال، أما المصفوفة:

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

والـناتجة عن إضافة عمود المقادير الحرة للجملة (2.1.2) إلى مصفوفة معاملاتها تسمى المصفوفة الموسعة للجملة (2.1.2).

سوف نرمز لأعمدة المصفوفة A بـــ $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ولعمود المقادير الحرة بـــ b.

مبرهنة (2.2.1):

إن رتـــبة المصـــفوفة الموسعة $\bar{A}$ إما أن تكون مساوية لرتبة المعاملاتA أو أنها تزيد 1 عن رتبة A.

البرهان:

لنفرض أن جملة الأعمدة:

$$a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{js}$$

تشكل قاعدة لجملة أعمدة المصفوفة A: $a_1, a_2, \cdots, a_n$

وكما هو واضح فإن القاعدة (2.2.1) هي جملة جزئية من الأعمدة.

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, b \qquad (2.2.2)$$

والتي تتشكل منها المصفوفة الموسعة $\bar{A}$.

إذا كـــانت الجملة الجزئية $a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{js}, b$ مرتبطة خطياً* فإن أكبر عدد من الأعمـــدة المســـتقلة خطيـــاً فـــي الجمـــلة (2.2.2) يكون مساوياً لــــ S ، وبالتالي يكون $r(\bar{A}) = r(A)$ أمـــا إذا كانت هذه الجملة مستقلة خطياً، فإن أكبر عدد من الأعمدة المستقلة خطيـــاً في الجملة (4.2.2) بكون مساوياً لـــ $s+1$ وبالتالي يكون $r\left(\bar{A}\right) = r(A)+1$ هو المطلوب برهانه.

مبرهنة (2.2.2) (مبرهنة كرونكر – كابيلي Kroncker – Cappelli Theorem):

الشـــرط الـــلازم والكافي كي تكون جملة المعادلات الخطية (2.1.2) مشتركة (أي

---

* إن رتبة المصفوفة A بالتعريف هو رتبة أكبر محددة فيها لا تساوي الصفر ، ونرمز لرتبة المصفوفة A بـــ Rank A أو اختصاراً r(A).

الارتباط و الاستقلال الخطي سندرسه في الفصل الثالث بالتفصيل مع دراسة قاعدة فضاء شعاعي.

قابلة للحل) هو أن تكون رتبة مصفوفة الأمثال A تساوي رتبة المصفوفة الموسعة لها أي: $r(A)=r\left(\bar{A}\right)$.

البرهان:

لـــزوم الشرط: بفرض $x_1=\alpha_1, x_2=\alpha_2, \cdots, x_n=\alpha_n$ هو حل لجملة المعادلات الخطية (2.1.2) هذا يعني أن:

$$\begin{aligned}
&a_{11}\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n=b_1\\
&a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{2n}\alpha_n=b_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{m1}\alpha_1+a_{m2}\alpha_2+\cdots+a_{mn}\alpha_n=b_m
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

إذا شكلنا المصفوفة الموسعة لجملة المعادلات (2.1.2):

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

إذا أجرينا على هذه المصفوفة التحولات الأولية وذلك بضرب العمود الأول بـــ α_1 والعمـــود الـــثاني بــــ α_2 وهكذا العمود الأخير بـــ α_n وطرحنا المجموع الحاصل من العمـــود الأخيـــر للمصفوفة (*) الموسعة آخذين بعين الاعتبار العلاقات (2.3.2) نحصل على:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{bmatrix}$$

والـــتي تـــبين أن رتـــبة المصـــفوفة A تســـاوي رتـــبة المصـــفوفة الموسعة أي $r(A)=r\left(\bar{A}\right)$.

كفاية الشرط: لنفرض أن رتبة المصفوفة الموسعة $\bar{A}$ تساوي رتبة مصفوفة الأمثال A وبفرض أن الرتبة تساوي r، استناداً لتعريف رتبة مصفوفة، إن r تقابل المحددة الكبرى غير المعدومة.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix}$$

والتي تعني أنه يوجد r صفاً مستقل لـ r من المجاهيل محددة المعاملات فيها يخالف الصفر ومنه فإن المعادلات (2.1.3) تصبح كما يلي:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r &= b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r &= b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r &= b_r - a_{2r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{aligned}$$

والتي تعني أنه يوجد r مجهولاً أساسياً و(n-r) مجهولاً اختياريا ومنه فإن الجملة قابلة للحل وهو المطلوب.

مبرهنة (2.2.3):

الشرط اللازم والكافي لكي يكون للجملة المشتركة حل وحيد هو أن تكون رتبة مصفوفة الجملة المشتركة مساوية لعدد المجاهيل في هذه الجملة.

البرهان:

لزوم الشرط: بفرض أن الجملة (2.1.2) تملك حلاً وحيداً $\ell=[\ell_1,\ell_2,\cdots\ell_n]$ ولنبرهن أن $r(A)\langle n$ (n عدد المجاهيل في الجملة (2.1.2).

لنفرض أن $r(A)\langle n$ عندئذ جملة المتجهات:

$$a_1, a_2, \cdots, a_n$$

تكون مرتبطة خطياً – أي أن العلاقة:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = 0$$

محققة من أجل الحالة التي يكون فيها $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ ليست جميعها أصفاراً، وعند ذلك يكون:

$$\begin{aligned}
&(\ell_1 + \alpha_1)c_1 + (\ell_2 + \alpha_2)a_2 + \cdots + (\ell_n + \alpha_n)a_n \\
&= (\ell_1\alpha_1 + \ell_2\alpha_2 + \cdots + \ell_n\alpha_n) + (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n) \\
&= b + o = b
\end{aligned}$$

أي أن الجملة $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = b$ تملك الحل:

$$\ell + \alpha = [\ell_1 + \alpha_1, \ell_2 + \alpha_2, \cdots, \ell_n + \alpha_n]$$

والـــذي يختلف عن الحل $\ell[\ell_1, \ell_2, \cdots, +\ell_n]$ وهذا يناقض الفرض بأن ℓ هو الحل الوحيد إذن $r(A) = n$.

كفايـــة الشرط: بفرض أن الجملة $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = b$ مشتركة وأن $r(A) = n$ ولنـــبرهن أن لهذه الجملة حل وحيد لنفرض أن الجملة تملك الحلين المختلفين. $\ell = [\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n]$

و $k = [k_1, k_2, \cdots, k_n]$ عندئذ يكون:

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_n a_n = b$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned}
&\ell_1 a_1 + \ell_2 a_2 + \cdots + \ell_n a_n = b \\
&(k_1 - \ell_1)a_1 + (k_2 - \ell_2)a_2 + \cdots + (k_n - \ell_n)a_n = 0
\end{aligned}$$

بما أن $k = [k_1, \cdots, k_n]$ و $\ell = [\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n]$ حلان مختلفان.

إذن يوجـــد j بحيـــث أن $k_j \neq \ell_j$ ومنه فإن $k_j - \ell_j \neq 0$ حيث $j = 1,2,\ldots,n$، إذن فمـــن العلاقة السابقة نستنتج أن جملة المتجهات مرتبطة $a_1, a_2, \cdots, a_n$ خطياً وهذا يناقض كون $r(A) = n$.

إذن فالجملة المفروضة تملك حلاً وحيداً وهو المطلوب.

قـــد يكـــون مـــن المفيد عند حل جملة معادلات خطية، إبدال الجملة المعطاة بجملة

أخرى مكافئة لها وفيما يلي سوف نبين كيفية ذلك.

تعريف (2.2.1):

لتكن لدينا جملة المعادلتين الخطيتين:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad \text{(i)}$$

$$\begin{aligned} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n &= c_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n &= c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{s1}x_1 + b_{s2}x_2 + \cdots + b_{sn}x_n &= c_s \end{aligned} \quad \text{(ii)}$$

نقــول عــن الجملــتين السابقتين إنهما متكافئتين إذا كان كل حل من حلول أحدى الجملتين حلاً للجملة الأخرى.

مثال(2.2.1):

إن جملة المعادلتين الخطيتين:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 &= 6 \end{aligned}$$

تكافئ الجملة:

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 &= 15 \\ x_1 + 3x_2 &= 9 \end{aligned}$$

وذلك لأنه بحل كل من الجملتين السابقتين نجد أنهما تملكان الحل المشترك:

$\ell = [0,3]$

مثال (2.2.2):

إن الجملة الخطية:

$$x_1 + x_2 = 5$$
$$2x_1 + 2x_2 = 10$$

تكافئ المعادلة:

$$3x_1 + 3x_2 = 15$$

وذلــك لأن جملة المتجهات ذات الشكل: $\ell = [k, 5-k]$ حيث k عدد اختياري من الحقل k، تشكل مجموعة من حلول لكل من الجملتين المفروضتين.

بفرض أنه لدينا جملتين خطيتين متكافئتين.

فــبمعرفة مجموعـــة حلول إحدى الجملتين نكون قد عرفنا مجموعة حلول الجملة الأخرى، لهذا فإننا سنقوم بإيجاد حلول الجملة الابسط.

تعريف (2.2.2):

تسمى التحويلات التالية على جملة معادلات خطية التحويلات البسيطة.

1- المبادلة بين موضعي معادلتين.

2- ضرب إحدى معادلات الجملة الخطية بعدد لا يساوي الصفر.

3- إضافة إحدى معادلات الجملة إلى معادلة أخرى بعد ضربها بعدد ما.

ملاحظة:

بســهولة يمكــن التأكد من أن التحويلات البسيطة على جملة من معادلات خطية، عكوســة. أي أنـــه إذا حصلنا من جملة خطية ما S بعد إجراء تحويل بسيط عليها، على جمــلة خطية S' فإنه يكون بالإمكان الحصول على الجملة S بتطبيق تحويل بسيط على الجملة S'.

مبرهنة (2.2.4):

بإجــراء أي تحويل بسيط على جملة معادلات خطية، نحصل على جملة معادلات خطية جديدة مكافئة للجملة الأصلية.

البرهان:

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad \text{(iii)}$$

سوف نرمز للجملة الناتجة من الجملة (iii) بعد إجراء تحويل بسيط ما عليها بالرمز (iii) وسنبرهن على أنه مهما يكن هذا التحويل البسيط المطبق على (iii) فإن الجملة الناتجة $(\text{iii})'$ستكون مكافئة لها.

لنفرض مثلاً أن التحويل البسيط المطبق على (iii) هو التحويل الأول، عندها الجملة $(\text{iii})'$ستكون مختلفة عن الجملة (iii) فقط بترتيب المعادلات، ولذلك فإن أي حل $\ell = [\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n]$ للجملة (iii) يكون حلاً للجملة $(\text{iii})'$.

أما إذا كان التحويل المطبق على الجملة (iii) هو التحويل الثاني أو الثالث فإن الجملة $(\text{iii})'$ستختلف عن الجملة (iii) بمعادلة واحدة فقط، ولتكن المعادلة الأولى مثلاً، حيث أنها ستكون من الشكل:

$$ca_{11}x_1 + ca_{12}x_2 + \cdots + ca_{1n} = cb_1 \qquad (2.3.3)$$

أو من الشكل:

$$(a_{11} + ca_{k1})x_1 + (a_{12} + ca_{k2})x_2 + \cdots + (a_{1n} + ca_{kn})x_n = b_1 + cb_k \quad (2.3.4)$$

حيث: $2 \le k \le m$

من السهل جداً ملاحظة أنه إذا كان المتجه $\ell = [\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_3]$ حلاً لجملة المعادلات (iii) فإنه يكون حلاً للمعادلتين (2.3.3) و (2.3.4) وبالتالي حلاً للجملة $(\text{iii})'$ وبنفس الطريقة السابقة يمكن البرهان على أن أي حل لجملة المعادلات الخطية $(\text{iii})'$ يكون حلاً للجملة (iii) وبذلك نكون قد برهنا على أن الجملتين (iii) و $(\text{iii})'$متكافئتان.

4- طرق حل جملة المعادلات الخطية:

قبل البدء بذكر طرق حل جملة المعادلات الخطية، نذكر الملاحظتين الهامتين التاليتين:

1- إذا كان في جملة معادلات خطية ذات n مجهولاً معادلة من الشكل:

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0 \qquad (2.4.1)$$

فإنه يمكن حذف هذه المعادلة من جملة المعادلات الخطية دون أن يؤثر ذلك في شيء على عملية حل الجملة وذلك لأن هذه المعادلة تتحقق من أجل أي متجه $\ell = [\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n]$.

2- إذا كان في جملة المعادلات الخطية معادلة من الشكل:

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b \qquad (2.4.2)$$

فإن هذه الجملة تكون غير مشتركة (أي ليس لها حل مشترك) وذلك لأن أي متجه: $\ell = [\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n]$ لا يمكن أن يحقق المعادلة (2.4.2).

من الآن فصاعداً سوف نرمز للمعادلة (2.4.1) بالرمز $0 = 0$ أما المعادلة (2.4.2) سنرمز لها بـ $0 = 1$ والآن سنعرض طرق حل جملة المعادلات الخطية:

أ) طريقة غاوس (Gauss Method):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned} \qquad (2.4.3)$$

ولنعتبر أن في جملة هذه المعادلات لا يوجد معادلات من الشكل (2.4.1) و(2.4.2)، لأن المعادلة من الشكل (2.4.1) يمكن حذفها في حال وجودها من الجملة (2.4.3) أما في حال وجود معادلة من الشكل (2.42) في جملة المعادلات الخطية السابقة فإن هذه

الجملة ستكون عندئذ جملة غير مشتركة.

بمـــا أن الجملة (2.4.3) ذات n مجهولاً، فإن هذه الجملة تحوي معادلة واحدة على الأقــل تضـــم المجهول x_1، بفرض أن هذه المعادلة هي المعادلة الأولي، أي أن $a_{11} \neq 0$ (إذا لــم تكــن المعادلة الأولي هي التي تضم x_1 ، فإنه يمكن جعلها الأولي بالمبادلة عدداً معــدوداً مــن المرات بين معادلات الجملة) سنجري الآن على الجملة (2.4.3) عدداً من التحويلات البسيطة.

نطـــرح مــن المعادلـــة الثانية المعادلة الأولي بعد ضربها بـــ $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ ثم نطرح من الثالثة المعادلة الأولي بعد ضربها بـــ$\frac{a_{31}}{a_{n}}$ ... ومن المعادلة m نطرح المعادلة الأولي بعد ضربها بـــ $\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ فنحصل بذلك على الجملة التالية:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p_2}x_{p_2} + a_{1,p_2+1}x_{p_2+1} + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{2p_2}x_{p_2} + a'_{2,p_2+1}x_{p_2+1} + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_1 \\
a'_{3p_2}x_{p_2} + a'_{3,p_2+1}x_{p_2+1} + \cdots + a'_{3n}x_n &= b'_3 \quad (2.4.4) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a'_{mp_2}x_{p_2} + a'_{m,p_2+1}x_{p_2+1} + \cdots + a'_{mn}x_n &= b'_m
\end{aligned}$$

حيث أن $2 \leq p_2 \leq n$، بذلك نكون قد حذفنا المجهول x_1 من جميع معادلات الجملة (2.4.3) بـــدءاً مـــن المعادلة الثانية إذا كان في الجملة (2.4.4) يوجد معادلة من الشكل (2.4.2) عـــندها تكـــون هـــذه الجملة غير مشتركة، وبالتالي الجملة (2.4.3) تكون غير مشتركة، ونتوقف عندها عند متابعة الحل أما إذا كان فيها معادلة من الشكل (2.4.1) فإننا لحذف هذه المعادلة.

ضـــمن المعـــاملات $a'_{2p_2}, a'_{3p_2}, \cdots, a'_{mp_2}$ يوجد معامل واحد على الأقل لا يساوي الصفر، لنفرض أن $a'_{2p_2} \neq 0$ ولنطرح المعادلة الثانية من المعادلة الثالثة بعد ضربها بـ $\frac{a'_3 p_2}{a'_{2p_2}}$ومن الرابعة بعد ضربها بـــ $\frac{a_4 p_2}{a'_{2p_2}}$ فنحصل على جملة جديدة حذف منها المجهول

$\cdot x_{p_2}$

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p_2}x_{p_2} + \cdots + a_{1,p_3}x_{p_3} + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{2p_2}x_{p_2} + a_{2,p_3}x_{p_3} + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2'' \\
a_{3p_3}x_{p_3} + a_{3n}x_n &= b_3'' \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{sp_3}x_{p_3} + \cdots + a_{sn}x_n &= b_n''
\end{aligned}
\qquad (2.4.5)
$$

حيث $2 \le p_2 \le p_3 \le n$ ، إن الجملة (4.4.5) مكافئة للجملة (2.4.4) وبالتالي فهي مكافئة للجملة (2.4.3) وبمتابعة الحذف السابقة عدداً محدداً من المرات نحصل على جملة معادلات خطية لها الشكل التالي ومكافئة للجملة (2.4.3).

$$
\begin{aligned}
c_{11}x_1 + \cdots + c_{1p_2}x_{p_2} + \cdots + c_{1,p_3}x_{p_3} + \cdots + c_{1n}x_n &= d_1 \\
c_{2p_2}x_{p_2} + \ldots + c_{2,p_3}x_{p_3} + \cdots + c_{2n}x_n &= d_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_{rp_r}x_{p_r} + \cdots + c_{rn}x_n &= d_r
\end{aligned}
\qquad (2.4.6)
$$

حيث $2 \le p_2 \langle p_3 \langle \cdots p_r \le n$

إن عدد معادلات الجملة (2.4.6) يساوي r، حيث $r \le m$ وذلك لأنه أثناء عمليات الحذف المتتالية للمجاهيل من المحتمل أن تكون قد حذفت بعض المعادلات.

إن الجملة (2.4.6) تسمى جملة ذات شكل متدرج، أو جملة متدرجة، إن رتبة مصفوفة الجملة (2.4.6) تساوي رتبة مصفوفتها الموسعة وتساوي r.

لهذا وحسب مبرهنة كرونيكر – كابيلي فإن هذه الجملة، وبالتالي الجملة (2.4.3) هي جملة مشتركة إذا كان $r = n$ فإن الجملة (2.4.6) تملك حلاً وحيداً وبالتالي فإن الجملة (2.4.3) تملك حلاً وحيداً حسب المبرهنة (2.2.3) أما إذا كان $r \langle n$ كان فإنه يكون للجملة (2.4.3) عدد لانهائي من الحلول في حالة كون $r = n$ فإن الجملة (2.4.6) ستكون من الشكل:

$$
\begin{aligned}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n &= d_1 \\
c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n &= d_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\\
c_{nn}x_n &= d_n
\end{aligned}
\qquad (2.4.7)
$$

حيث جميع الأمثال $(c_{11} \neq o, c_{22} \neq o, \cdots, c_{nn} \neq o)$

مـــن المعادلة الأخيرة في الجملة (2.4.7) نلاحظ أن للمجهول x_n قيمة وحيدة هي: $x_n = \dfrac{d_n}{c_{nn}}$ وبـــتعويض x_n بقيمته في المعادلة ما قبل الأخيرة في الجملة (2.4.7) نحصل عـــلى قيمة المجهول x_{n-1} وهي وحيدة أيضاً، وبمتابعة عملية التعويض هذه في معادلات الجملة (2.4.7) نحصل على قيمة وحيدة لكل من المجاهيل $x_{n-2}, x_{n-3}, \cdots, x_2, x_1$، إن قيم المجـــاهيل $x_1, x_2, \cdots, x_{n1}$ تشكل متجهاً يمثل حلاً وحيداً للجملة (2.4.7) وبالتالي للجملة (2.4.3).

أما في حالة كون $r \langle n$ فإن الجملة (2.4.6) تكون جملة متدرجة، نسمي المجاهيل: $x_1, x_{p2}, \cdots, x_{pr}$ والتي تبدأ بها معادلات الجملة (2.4.6) المجاهيل الرئيسية أو المجاهيل الأساسية.

أما المجاهيل الباقية فتسمى المجاهيل الحرة، سنرمز للمجاهيل الحرة بـــ:

$$x_{p_{r+1}}, x_{p_{r+2}}, \cdots, x_{p_n}$$

مـــن المعادلـــة الأخيـــرة نحصـــل على قيمة المجهول x_{p_r} بدلالة المجاهيل الباقية $x_{p_{r+1}}, x_{p_{r+2}}, \ldots, x_{p_n}$ وبـــتعويض x_{p_r} في المعادلة ما قبل الأخيرة بقيمته بدلالة المجاهيل الحـــرة نحصـــل على قيمة المجهول $x_{p_{r-1}}$ بدلالة المجاهيل الحرة ، وهكذا وبمتابعة عملية الـــتعويض هـــذه إلى أن نصل إلى المعادلة الأولي فنحصل على قيمة المجهول x_1 بدلالة المجـــاهيل الحـــرة، وبذلك نكون قد حصلنا على قيم المجاهيل الرئيسية $x_1, x_{p2}, \cdots, x_{pr}$ بدلالة المجاهيل الحرة أي:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= k_{1,r+1}x_{p_{r+1}} + k_{1,r+2}x_{p_{r+2}} + \cdots + k_{1n}x_{p_n} + k_{10} \\
x_2 &= k_{2,r+1}x_{p_{r+1}} + k_{2,r+2}x_{p_{r+2}} + \cdots + k_{2n}x_{p_2} + k_{20} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{pr} &= k_{r,r+1}x_{p_{r+1}} + \cdots + k_{r_n}x_{p_n} + k_{r_0}
\end{aligned}
\qquad (2.4.8)
$$

وبتعويض $x_{p_{r+1}}, x_{p_{r+2}}, \cdots, x_{p_n}$ بقيم اختيارية نحصل على قيمة محددة تماماً للمجاهيل الرئيسية، وبما أن المجاهيل الحرة يمكن أن تعطي عدداً لانهائياً من القيم فإن الجملة (2.4.6) وبالتالي الجملة (2.4.3) لها عدد لانهائي من الحلول.

إن العلاقات (2.4.8) تعبر عن مجموعة كل حلول الجملة (2.4.3) ولهذا فإن هذه العلاقات تسمى الحل العام للجملة (2.4.3).

ملاحظة:

مما سبق دراسته نلاحظ أنه:

أ) إذا كانت رتبة المصفوفة الموسعة تساوي رتبة مصفوفة الأمثال وتساوي عدد المجاهيل n فإن للجملة (2.4.3) حل وحيد.

ب) إذا كانت رتبة مصفوفة الأمثال تساوي رتبة المصفوفة الموسعة وتساوي r حيث $r \langle n$ فيوجد عدد غير منته من الحلول للجملة (2.4.3) ، (r مجهول بدلالة $n-r$ مجهول اختياري).

ج) إذا كانت رتبة المصفوفة الموسعة لا تتوافق مع رتبة مصفوفة الأمثال فالجملة مستحيلة الحل.

مثال (2.4.1):

بين أن لجملة المعادلات الخطية التالية حلاً وحيداً:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\
x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -4 \\
x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 2
\end{aligned}
$$

الحل:

لنشكل المصفوفة الموسعة ونطبق عليها تحويلات بسيطة:

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & \vdots & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \vdots & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & \vdots & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2 \to R_2 - R_1 \\ ------ \\ R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & \vdots & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \vdots & 2 \end{array}\right]$$

من المصفوفة الأخيرة نلاحظ أن r = n = 4

أي رتبة المصفوفة الموسعة = رتبة مصفوفة المعاملات وتساوي عدد المجاهيل = 4 إذن للمعاملات حل وحيد وهو:

$$x_2 = -1 \qquad x_3 = 2 \qquad x_4 = -2 \qquad x_1 = 1$$

مثال (2.4.2):

بين قابلية الحل في جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 11x_4 &= 12 \end{aligned}$$

الحل:

لنشكل المصفوفة الموسعة ونطبق عليها تحويلات بسيطة:

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & \vdots & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & \vdots & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & \vdots & 12 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ ------ \\ R_3 \to R_3 - 5R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & \vdots & 2 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \vdots & 2 \end{array}\right]$$

نلاحـــظ أن رتبة مصفوفة المعاملات $3 = \left(\bar{A}\right) = r(A)$ أما عدد المجاهيل فيساوي

$\cdot r(n$

ومـــنه فإنـــه يوجـــد عـــدد غيـــر منته من الحلول بدلالة مجهول اختياري واحد:
$4-3=1$

مثال (2.4.3):

بيّن أن جميع المعادلات الخطية التالية غير قابلة للحل:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\
x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 \\
x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 4 \\
x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 &= 6
\end{aligned}
$$

الحل:

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & -1 & \vdots & 0 \\
1 & -1 & 1 & 2 & \vdots & 4 \\
1 & 5 & 5 & -4 & \vdots & -4 \\
1 & 8 & 7 & -7 & \vdots & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{c}
R_2 \to R_2 - R_1 \\
----- \\
R_3 \to R_3 - R_1 \\
R_4 \to R_4 - R_1
\end{array}
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & -1 & \vdots & 0 \\
0 & -3 & -2 & 3 & \vdots & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 4
\end{array}\right]
$$

نلاحظ أن $r\left(\bar{A}\right) \neq r(A)$ والجملة غير قابلة للحل:

2- طريقة كرامر (Cramers Method):

إن هـــذه الطريقة تقتصر على جملة المعادلات الخطية المربعة أي التي يكون فيها عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل، أي من الشكل:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
\qquad (*)
$$

والتي محددة مصفوفة المعاملات A لا يساوي الصفر أي:

$$\det(A) \neq 0$$

مبرهنة (2.4.1):

إن جمـــلة المعادلات الخطية المربعة (*) والتي محددة مصفوفة معاملاتها(الأمثال) لا يساوي الصفر تملك حلاً مشتركاً وحيداً.

البرهان:

بدايـــة لنفرض بأن الجملة(*) تملك حلاً مشتركاً، وسنقوم بإيجاد هذا الحل ونبرهن على وحدانيته.

لـــنفرض أنـــه يوجـــد n عدداً، $x_1, x_2, ..., x_n$ والتي من أجلها تتحقق المعادلات(*) جميعهـــا، وبضرب كل معادلة من معادلات الجملة (*) بالمتممات الجبرية لعناصر العمود (j) من مصفوفة أمثال هذه الجملة نحصل على:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{a}_{11}x_1A_{1j} + \mathrm{a}_{2}x_2A_{1j} + \cdots + \mathrm{a}_{1n}x_nA_{1j} = b_1A_{1j}\\
&\mathrm{a}_{21}x_1A_{2j} + \mathrm{a}_{22}x_2A_{2j} + \cdots + \mathrm{a}_{2n}x_nA_{2j} = b_2A_{2j}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\mathrm{a}_{n1}x_1A_{nj} + \mathrm{a}_{n2}x_2A_{nj} + \cdots + \mathrm{a}_{nn}x_nA_{nj} = b_nA_{nj}
\end{aligned}$$

وبجمع المعادلات السابقة نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\left(\mathrm{a}_{1i}A_{1j} + \mathrm{a}_{2i}A_{2j} + \cdots + \mathrm{a}_{ni}A_{nj}\right) = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj}$$

وكما نعلم فإن مجموع جداءات عناصر العمود i بالمتممات الجبرية لعناصر العمود j تساوي الصفر عندما $i \neq j$ ويساوي قيمة محددة المصفوفة للجملة(*) عندما $i = j$ إذن من المساواة الأخيرة نحصل على:

$$x_j\Delta = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj} \qquad (**)$$

وكما نعلم أيضاً، فإن الطرف الأيمن من المساواة (**) يساوي قيمة محددة اعمدتها جميعـــاً باســـتثناء العمود (j) هي نفس أعمدة محددة مصفوفة الأمثال للجملة (*) ، Δ،أما العمود (j) فهو العمود المشكل من المقادير الحرة:

وإذا رمـــزنا لهـــذه المحددة بـــ Δ_j $b_1, b_2, \cdots, b_n$ تصبح المساواة (**) على الشكل التالي:

$$x_j\Delta = \Delta_j \qquad ; \qquad j = 1,2,\cdots,4$$

وبالتالي يكون:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \qquad ; \qquad j = 1,2,\cdots,n \qquad (***)$$

وهكـــذا نكـــون قد برهنا أنه إذا كان الحل $x_1, x_2, \cdots, x_n$ للجملة (*) موجوداً، حيث أنها مربعة ومحددتها لا تساوي الصفر فإن هذا الحل يعرف وبشكل وحيد بالعلاقة (***) وبما أن الجملة مربعة ومحددتها لا تساوي الصفر فإننا نستنتج أن $r(A) = r\left(\bar{A}\right)$ وبالتالي الجملة (*) هي جملة مشتركة، أي أنها تملك حلاً مشتركاً.

مثال(2.4.4):

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 30 \\
-x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 10 \\
x_2 - x_3 - x_4 &= 3 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 10
\end{aligned}$$

بســـهولة يمكن التأكد بأن رتبة مصفوفة المعاملات للجملة تساوي رتبة مصفوفتها الموسعة وتساوي أربعة أي أن الجملة مشتركة.

إن محددة مصفوفة المعاملات للمعادلات السابقة:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

وبما أن:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 30 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \quad ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 30 & 3 & 4 \\ -1 & 10 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 30 & 4 \\ -1 & 2 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -12 \quad ; \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 30 \\ -1 & 2 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{vmatrix} = -16$$

فإن الحل المشترك والوحيد للجملة المعطاة يكون:

$$x_1 = \frac{-4}{-4} = 1 \ , \ x_2 = \frac{-8}{-4} = 2 \ , \ x_3 = \frac{-12}{-4} = 3 \ , \ x_4 \frac{-16}{-4} = 4$$

مثال (2.4.5):

حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}$$

إن هذه الجملة مشتركة لأن: $r(A) = r\left(\bar{A}\right) = 3$ وبما أن محددة مصفوفة المعاملات $\Delta = -5$ لا تساوي الصفر فإن لجملة المعادلات السابقة حل مشترك.

بحساب كل $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ نجد أن:

$$\Delta_1 = -5 \quad , \quad \Delta_2 = 5 \quad , \quad \Delta_3 = -10$$

وبالتالي يكون الحل المشترك لهذه الجملة هو الشعاع $(1,-1,2)$.

5- جملة المعادلات الخطية المتجانسة (System of homogenous linear equation)

تعريف (2.5.1):

إن جمـلة المعـادلات الخطية التي تكون فيها المقادير الحرة أصفاراً تسمى جملة المعادلات الخطية المتجانسة.

إن الشكل العام لهذه الجملة هو:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \qquad (2.5.1)$$

ملاحظة(2.5.1):

إن جملة المعادلات الخطية المتجانسة (2.5.1) هي جملة مشتركة دوماً لأنه أياً كان عدد معادلات هذه الجملة وعدد مجاهيلها، وأياً كانت المعاملات فإن:

$$0 = [0,0,\cdots,0]$$

هـو حـل للجملة (2.5.1) ونسميه الحل الصفري في كثير من الحالات يكون من الضـروري معرفة ما إذا كانت جملة معادلات متجانسة ما تملك حلاً غير الحل الصفري أم لا، لأنه ليست كل جملة معادلات خطية متجانسة تملك حلاً غير الحل الصفري.

مبرهنة(2.5.1):

إن أي جمـلة معـادلات خطيـة متجانسة يكون فيها عدد المعاملات أقل من عدد المجاهيل تملك حلولاً مغايرة للصفر.

البرهان:

سنبرهن هذه المبرهنة بطريقة الاستقراء الرياضي.

مـن أجـل $n = 2$ (n هو عدد المجاهيل في جملة المعادلات الخطية المتجانسة) (2.5.1)، فإن الجملة تكون مكونة من معادلة واحدة فقط.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0$$

إن هــذه المعادلــة وكما هو واضح تملك عدداً لانهائياً من الحلول المغايرة للصفر ولــنفرض أن المبرهنة صحيحة من أجل n -1 أي أن جملة معادلات خطية متجانسة ذات $n-1$ مجهــولاً والــتي عــدد معادلاتها أقل من عدد مجاهيلها، تملك عدداً لا نهائياً من الحلول المغايرة للحل الصفري.

ولنبرهن صحة هذه المبرهنة من أجل n لنفرض أن:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0
\end{aligned} \qquad (2.5.2)$$

جمــلة اخــتيارية مــن m معادلة خطية متجانسة وذات n مجهولاً، وحيث أن عدد المعــادلات m أصــغر مــن عدد المجاهيل n إذا كانت جميع معاملات الجملة (2.5.2) مســاوية للصــفر فــإن هــذه الجملة تملك حلولاً مغايرة للصفر وذلك لأن شعاع هو حل $\ell = [\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n]$ للجملة (2.4.2).

لــنفرض الآن أن أحــد معــاملات الجملة (2.5.2) لا يساوي الصفر وليكن مثلاً $a_{11} \neq 0$ بإضافة المعادلة الأولي من الجملة (2.5.2) بعد ضربها بــ $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ إلى المعادلة (i) حيــث $i = 1,2,\cdots,m$ نحصل على جملة جديدة من m معادلة خطية متجانسة وذات n مجهولاً:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n &= 0 \\
a'_{32}x_2 + \cdots + a'_{3n}x_n &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\
a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n &= 0
\end{aligned} \qquad (2.5.3)$$

إن الجمــلة (2.5.3) تكــافئ الجملة (2.5.2) لأنه حصلنا عليها بتحويلات بسيطة على الجملة (2.5.2) لنأخذ الآن جملة المعادلات الخطية المتجانسة التالية:

$$
\begin{aligned}
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= 0 \\
a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{3n}x_n &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \cdots + a'_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}
\qquad (2.5.4)
$$

إن هــذه الجمــلة مكونة من $m - 1$ معادلة وذات $n - 1$ مجهولاً وبما أن $m \langle n$ فإن $m - 1 \langle n - 1$ وحسب الفرض فإن الجملة (2.5.4) تملك حلولاً مغايرة للحل الصفري.

لنفرض أن المتجه: $\ell = [\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n]$ هو حل للجملة (2.5.4)، فيكون المتجه:

$$\ell' = \left[\frac{-a_{12}\ell_2 - a_{13}\ell_3 - \cdots - a_{1n}\ell_n}{a_{11}}, \ell_2, \ell_3, \cdots, \ell_n\right]$$

حــل للجملة (2.5.3)، وبالتالي حل للجملة المكافئة لها أي للجملة (2.5.2) وبذلك نكون قد برهنا صحة هذه المبرهنة من أجل أي عدد طبيعي n.

ســوف نقــوم الآن بدراسة جملة المعادلات الخطية المتجانسة (2.5.1) عن طريق استخدام ما تم برهانه من مبرهنات ونتائج تتعلق بجملة المعادلات الخطية غير المتجانسة، وكما رأينا فإن هذه الجملة مشتركة وتملك الحل الصفري.

$$0 = (0, 0, \cdots, 0)$$

وهذا يتوافق أيضاً مع برهنة كرونيكر – كابيلي، حيث أن رتبة مصفوفة هذه الجملة تساوي رتبة مصفوفتها الموسعة، وذلك لأن المصفوفة الموسعة تحوي عموداً واحداً فقط زيادة علــى أعمــدة مصفوفة الجملة وهذا العمود هو العمود الصفري،ولما كان إضافة العمــود الصــفري إلى مصفوفة ما لا تغير رتبة هذه المصفوفة، لذلك فإن رتبة مصفوفة الجملة (2.5.1) تساوي رتبة مصفوفتها الموسعة.

إذا كــانت رتــبة مصفوفة الجملة (2.5.1) أصغر من n فإن هذه الجملة تملك عدداً لانهائياً من الحلول، وبالتالي فهي تملك حلولاً مختلفة عن الحل الصفري.

وبشــكل خــاص إذا كان عدد معادلات الجملة المتجانسة (2.5.1)أصغر من عدد مجاهيلها فإننا نستنتج مباشرة أن هذه الجملة تملك حلولاً مغايرة للحل الصفري، وذلك لأن

مرتبة مصفوفة هذه الجملة في هذه الحالة لا يمكن أن تكون مساوية لعدد مجاهيلها، بحل جملة المعادلات الخطية المتجانسة (2.5.1) وفق الطريقة(*) المصفوفية

سوف نحصل على جملة مثلثية الشكل إذا كانت رتبة مصفوفة هذه الجملة مساوية لـ n، وسوف نحصل على جملة متدرجة الشكل إذا كانت رتبة مصفوفة الجملة (2.5.1) أصغر من n.

إذا تحولت جملة المعادلات الخطية المتجانسة إلى جملة متدرجة الشكل، فإن حلها العام سيكون من الشكل:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= k_{1,r+1}x_{r+1} + k_{1,r+2}x_{r+2} + \cdots + k_{1n}x_n \\
x_2 &= k_{2,r+1}x_{r+1} + k_{2,r+2}x_{r+2} + \cdots + k_{2n}x_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_r &= k_{r,r+1}x_{r+1} + k_{r,r+2}x_{r+2} + \cdots + k_{rn}x_n
\end{aligned}
$$

مبرهنة (2.5.2):

إذا كان المتجه $b = [b_1, b_2, \cdots, b_n]$ حلاً لجملة المعادلات الخطية المتجانسة (2.5.1) فإن المتجه $kb = [kb_1, kb_2, \cdots, kb_n]$ حيث k عدد ما، يكون حلاً للجملة (2.5.1).

البرهان:

لتكن الجملة (2.5.1) على شكل معادلة متجهية:

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = 0$$

وبما أن الشعاع $b = [b_1, b_2, \cdots, b_n]$ حلاً للجملة (2.5.1) فإن:

$$b_1a_1 + b_2a_2 + \ldots + b_na_n = 0$$

وعندئذ يكون الشعاع:

$$kb = [kb_1, kb_2, \cdots, kb_n]$$

---

* هذه الطريقة تعتمد على أخذ مصفوفة معاملات الجملة تحويلات أولية (بسيطة) على صفوف هذه المصفوفة (طريقة غاوس).

حلاً للجملة (2.5.1) وبالتالي حلاً للجملة المتجهة وهو المطلوب.

مبرهنة (2.5.3):

إذا كان المتجهان:

$$b=[b_1,b_2,\cdots,b_n] \quad , \quad c=[c_1,c_2,\cdots,c_n]$$

حلين لجملة المعادلات الخطية المتجانسة (2.5.1) فإن مجموعهما يكون أيضاً حلاً لهذه الجملة.

البرهان:

بما أن الشعاعين $c=[c_1,c_2,\cdots,c_n]$ و $b=[b_1,b_2,\cdots,b_n]$ هما حلان للجملة (2.5.1) فإن:

$$b_1 a_1+b_2 a_2+\cdots+b_n a_n=0$$

و

$$c_1 a_1+c_2 a_2+\cdots+c_n a_n=0$$

وبجمع هاتين العلاقتين نجد:

$$(b_1+c_1)a_1+(b_2+c_2)a_2+\cdots+(b_n+c_n)a_n=0$$

ومنه نستنتج أن المتجه:

$$b+c=[b_1+c_1,+b_2+c_2,\cdots,b_n+c_n]$$

يكون حلاً للجملة (2.5.1) وهو المطلوب.

نتيجة(2.5.1):

إذا كانت المتجهات حلولاً لجملة المعادلات الخطية المتجانسة (2.5.1) فإن أي تركيب خطي لهذه الحلول:

$$\ell=k_1 b_1+k_2 b_2+\cdots k_s+b_s$$

سيكون حلاً لهذه الجملة.

ملاحظة (2.5.2):

يمكن ملاحظة أن المبرهنتين السابقتين ليستا صحيحتين من أجل المعادلات الخطية غيـــر المتجانســـة، أي المعادلات التي تكون فيها المقادير الحرة $b_1, b_2, \cdots, b_n$ لا تساوي الصفر.

ســنعرض فيمـــا يلي جملة الحلول الأساسية لجملة معادلات خطية متجانسة، لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية المتجانسة (2.5.1) وبفرض أن هذه الجملة لها عدد لانهائي مـــن الحلول، إن كل حل من حلول هذه الجملة هو عبارة عن متجه عددي بعده n ، وأن مجموعـــة كل حلول هذه الجملة هي عبارة عن جملة لانهائية من المتجهات العددية ذات البعد n.

نحـــن نعـــلم أن أي جملة مؤلفة من s متجه عددي من البعد n تشكل جملة مرتبطة خطياً في حال كون $s \rangle n$.

مـــن هـــنا نستنتج أنه من مجموعة كل حلول الجملة (2.5.1) يمكننا اختيار جملة أعظميـــه من الحلول المستقلة خطياً $b_1, b_2, \cdots, b_m$، و المقصود هنا بعبارة أعظميه هو أنه إذا أضـــفنا إلى جملة الحلول المختارة هذه أي حل آخرc نحصل على جملة مرتبطة خطياً $b_1, b_2, \cdots, b_m, c$ومنه نستنتج أن الحل الاختياري c يكتب على شكل تركيب خطي للحلول $b_1, b_2, \cdots, b_m$ وهكـــذا فـــإن جملة الحلول المستقلة خطياً $b_1, b_2, \cdots, b_m$ تتمتع بالخاصة التالية: وهي أنه بدلالتها يعبر خطياً عن أي حلc للجملة (4.5.1)

تعريف (2.5.2):

أي جملة مستقلة خطياً من حلول جملة المعادلات الخطية المتجانسة (2.5.1) والتي بدلالتها يعبر خطياً عن أي حل لهذه الجملة تسمى جملة الحلول الأساسية.

نتيجة(2.5.2):

إن جمـــلة المعادلات الخطية المتجانسة والتي تملك عدداً لانهائياً من الحلول، يمكن أن يكـــون لهـــا عدد كبير من جمل الحلول الأساسية المختلفة، غير أن هذه الجمل تحوي عدداً واحداً من الحلول.

نتيجة(2.5.3):

بفرض أن $b_1, b_2, \cdots, b_m$ و $c_1, c_2, \cdots, c_s$

جملــتان أساسيتان من الحلول لجملة المعادلات (2.5.1) إن كلاً من هاتين الجملتين يمكن أن تكون قاعدة للجملة.

$$b_1, b_2, \cdots, b_m \,,\, c_1, c_2, \cdots, c_s$$

ولهذا فإن:

$$m = s$$

مثال (2.5.6):

أوجــد الحــل العام، ثم جملة الحلول الأساسية لجملة المعادلات الخطية المتجانسة التالية:

$$\begin{aligned}
&x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0\\
&x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0\\
&3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0\\
&2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0
\end{aligned}$$

الحل:

بإجراء عدد من التحويلات البسيطة على مصفوفة معاملات هذه الجملة:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 & 0\\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 & 0\\ 3 & 1 & -8 & 2 & 1 & 0\\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} R_2 - R_1\\ \sim\\ R_3 - 3R_1\\ R_4 - 2R_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 & 0\\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 & 4\\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 & 0\\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} R_3 - R_2\\ \sim\\ -\frac{1}{2}R_2\\ \ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 & 0\\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \ \\ \ \\ +\frac{1}{2}R_2\\ \sim \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 & 0\\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبذلك نكون قد حصلنا على جملة متدرجة من الشكل:

$$x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0$$
$$8x_2 - 7x_3 + 254x_4 - 4x_5 = 0$$

إن المجـــاهيل الرئيسية لهذه الجملة هيx_1 ، x_2 أما المجاهيل الحرة فهي x_3 ، x_4 ، x_5 من المعادلة الثانية نحصل على قيمة المجهول الرئيسي x_2 بدلالة المجاهيل الحرة.

$$x_2 = \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5$$

وبتعويض x_2 في المعادلة الأولى نحصل على قيمة x_1.

$$x_1 = \frac{19}{8}x_3 - \frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5$$

و هكذا فإن الحل العام للجملة المعطاة يكون من الشكل:

$$x_1 = \frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \quad \wedge \qquad x_2 = \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5$$

ومـــن أجـــل إيجاد جملة حلول أساسية لجملة المعادلات الخطية المتجانسة المعطاة نـــأخذ جملة مكونة من ثلاثة متجهات عددية من البعد 3 وبحيث تكون هذه الجملة مستقلة، خطياً (إن عدد المتجهات وبعدها يساوي عدد المجاهيل الحرة).

إذن نتأخذ جملة المتجهات العددية التالية و المستقلة خطياً.

$$a_1' = [1,0,0] \quad , \quad a_2' = [0,1,0] \quad , \quad a_3' = [0,0,1]$$

وبـــتعويض المجاهيل الحرة x_3, x_4, x_5 في الحل العام بمركبات كل من المتجهات العددية السابقة نحصل على القيم الموافقة التالية للمجهولين x_2, x_1.

$a_1' = [1,0,0]$ من أجل $x_2 = \frac{7}{8}$ و $x_1 = \frac{19}{8}$

$a_2' = [0,1,0]$ من أجل $x_2 = -\frac{25}{8}$ و $x_1 = \frac{3}{8}$

$a_3' = [0,1,0]$ من أجل $x_2 = \frac{1}{2}$ و $x_1 = -\frac{1}{2}$

وبالتالي المتجهات التالية تشكل جملة حلول أساسية:

$$a_1 = \left[\frac{19}{8}, \frac{7}{8}, 1, 0, 0\right]$$

$$a_2 = \left[\frac{3}{8}, -\frac{25}{8}, 0, 1, 0\right]$$

$$a_3 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 1\right]$$

في نهاية هذا الفصل نجد أنه بتجميع كل ما عرض نصل إلى الآتي:

ا) يمكن تطبيق طريقة غاوس على أية جملة معادلات خطية.

وعندئذ تكون الجملة غير قابلة للحل إذا حصلنا أثناء عملية التحويلات البسيطة على مصفوفة المعاملات، على معادلة تكون معاملات جميع المجاهيل فيها تساوي الصفر وحدها المطلق لا يساوي الصفر، أما إذا لم تقابل مثل هذه المعادلة فإن الجملة تكون قابلة للحل.

إن جملة المعادلات القابلة للحل تكون معينة بشكل وحيد (أي لها حل وحيد) إذا أمكن تحويلها إلى الشكل (2.4.7) والذي نسميه الصورة المثلثية للجملة حيث عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل، ويكون للجملة عدد غير منته من الحلول إذا أمكن تحويلها إلى الشكل (2.4.6) والذي نسميه شبه المنحرفية للجملة وفي هذه الحالة تكون عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل.

ب) يمكن تطبيق ما ورد في حالة جملة المعادلات الخطية المتجانسة.

تكون مثل هذه الجملة قابلة للحل دوماً بما أن لها حلاً صفرياً (صفر ، صفر، ...، صفر) ، نفرض أن عدد المعادلات في الجملة قيد الدرس أقل من عدد المجاهيل عندئذ لا يمكن تحويل هذه الجملة إلى الصورة المثلثية لأن عدد معادلات الجملة خلال عملية التحويلات بطريقة غاوس يمكن أن يقل ولا يمكن أن يكبر وعلى هذا فإنها تتحول إلى الصورة شبه المنحرفية أي أن لها عدد غير منته من الحلول، وبعبارة أخري إذا كان عدد المعادلات في جملة المعادلات الخطية المتجانسة أقل من عدد المجاهيل فإلي جانب الحل

الصـــفري يكون لهذه المجموعة حلولاً غير صفرية أيضاً، أي حلول تكون فيها قيم بعض المجاهيل (أو حتى كلها) لا تساوي الصفر ويكون عدد مثل هذه الحلول غير منته.

أمثلة(2.5.6):

أ) أوجد حل الجملة التالية بطريقة غاوس:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 &= 25 \end{aligned}$$

الحل:

نجري التحويلات على المصفوفة الموسعة لهذه الجملة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & \vdots & -9 \\ 1 & -1 & 3 & \vdots & 2 \\ 3 & -6 & -1 & \vdots & 25 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & \vdots & -9 \\ 0 & -3 & -2 & \vdots & 11 \\ 0 & -12 & -16 & \vdots & 52 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & \vdots & -9 \\ 0 & -3 & -2 & \vdots & 11 \\ 0 & 0 & -8 & \vdots & 8 \end{bmatrix}$$

وبذلك نحصل على جملة المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -9 \\ -3x_2 - 2x_3 &= 11 \\ -8x_3 &= 8 \end{aligned}$$

ولهذه الجملة حل وحيد هو:

ب) ناقش حل الجملة التالية:

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 &= 1 \\ x_1 - 7x_3 + 2x_4 &= -5 \\ 11x_2 + 20x_3 - 9x_4 &= 2 \end{aligned}$$

الحل:

نأخذ المصفوفة الموسعة للجملة السابقة ونجري عليها تحويلات بسيطة:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & -8 & 1 & \vdots & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -5 & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 2 & \vdots & -5 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & -8 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & \vdots & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & \vdots & -8 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & -8 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & \vdots & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & \vdots & -8 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & \vdots & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & -8 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & \vdots & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & \vdots & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

توصلنا إلى جملة تحوي المعادلة $2 = 0$ وعلى هذا تكون الجملة الأساسية غير قابلة للحل.

ج) حل الجملة التالية:

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

هذه جملة معادلات متجانسة علماً بأن عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل ولهذا يجب أن يكون لهذه الجملة عدد غير منته من الحلول وبما أن جميع الحدود المطلقة تساوي الصفر فإننا سوف نجري التحويلات البسيطة على مصفوفة المعاملات للجملة.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 9 & -5 & -13 \\ 0 & 7 & 5 & -11 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 5 & -11 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

لقد توصلنا إلى جملة المعادلات :

$$\begin{aligned} 2x_2 - 2x_4 &= 0 \\ 7x_2 + 5x_3 - 11x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

يمكننا أخذ أحد المجاهيل x_2، x_4 كمجهول مطلق

نفرض أن $x_4 = a$ عندئذ نجد أن:

$$x_1 = \frac{3}{5}a \quad , \quad x_3 = \frac{4}{5}a \quad , \quad x_2 = a$$

وهكذا فإن:

$a , \frac{4}{5}a , a , \frac{3}{5}a$ هي الصورة العامة لحلول جملة المعادلات المعطاة.

الفصل الثالث

الفضاءات المتجهية (الشعاعية)

Vector Spaces

أولاً/ تعريف الفضاء المتجهي:

تمهيد:

إن مفهوم الفضاء المتجهي يستخدم وعلى نطاق واسع في شتي علوم الرياضيات، والمقصود هنا بالمتجهات هو غير المتجهات المعروفة في الفيزياء والميكانيكا (قطعة مستقيمة موجهة)، إنما هي عبارة عن كائنات جبرية مجردة عرفت من أجلها عمليتان جبريتان، الأولى هي عملية جمع هذه الكائنات والثانية هي عملية ضرب هذه الكائنات بمقدار عددي من حقل اختياري k، لهذا فإنه من الطبيعي دراسة نظرية الفضاءات المتجهية دراسة مجردة وذلك من خلال صياغة مناسبة لبديهيات الفضاء المتجهي والتي تحدد فقط الشروط التي يجب أن تتحقق من أجل عمليتي جمع المتجهات وضربها بمقادير عددية ومن التطرق لكيفية تطبيق هاتين العمليتين، وإلى خواص عناصر الفضاء المتجهي.

سنرمز للفضاءات المتجهية بالأحرف اللاتينية W,V,U... ولعناصر الفضاءات بالأحرف w,v,u أما عناصر الحقل k فسوف نرمز لها بالأحرف a,b,c، ونسمى عناصر الفضاء المتجهي متجهات، أما عناصر الحقل مقادير عددية (أو أعداد).

تعريف(3.1.1):

ليكن k حقلاً ما، ولتكن V مجموعة غير خالية مزودة بعمليتين.

أ) داخلية تقابل كل عنصرين $u.v\in V$ مجموعها $u+v\in V$ وتسمى عملية الجمع.

ب) خارجية وتقابل كل عنصرين $a\in k,u\in V$ بحاصل ضربهما $au\in V$ وتسمي عملية الضرب بعدد.

نسمى المجموعة V فضاء متجهي فوق الحقل k إذا تحققت الشروط التالية:

1- V زمرة تبديلية بالنسبة الداخلية (+).

2- عملية الضرب بمقدار عددي تجميعية أي أنه من أجل مقدارين عددين $a.b\in k$ وأي $u\in V$ فإن: $(ab)u=a(bu)$

3- من أجل أي عنصر $u \in V$ فإن: $1.u = u$

4- عمــلية الضرب بمقدار عددي توزيعية بالنسبة لعملية جمع عناصر المجموعة V أي أنه من أجل أي مقدار عددي a وأي عنصرين v,u من V فإن:

$$a(u+v) = au + av$$

5- عمــلية الضرب بمقدار عددية توزيعية بالنسبة لجمع المقادير العددية، أي أنه من أجل أي مقدارين عددين $a.b \in K$ وأي عنصر $u \in V$ فإن:

$$(a+b)u = au + bu$$

ملاحظة:

إذا كــان k هــو حقــل الأعداد الحقيقية $\Re$ فإن الفضاء المتجهي V يسمى الفضاء المتجهي الحقيقي، أما إذا كان k هو حقل الأعداد المركبة C فإن الفضاء V يسمي الفضاء المتجهي المركب.

نتائج:

1. مجمــوع أي عــدد مــن متجهات الفضاء V لا يتعلق بترتيب الحدود ولا يتطلب أية أقواس.

2. في الفضاء المتجهي V يوجد متجه صفري θ هو وحيد بحيث يكون:

$$u + \theta = u \qquad , \qquad \forall u \in V$$

3. من أجل أي متجه $u \in V$ يوجد في الفضاء V متجه وحيد u- من أجله يكون:

$u + (-u) = \theta$ (إن u- يسمى نظير المتجه u)

4. فــي الفضــاء المتجهيV عملية الطرح محققة، أي أنه من أجل أي متجهين اختياريين $v.u$ مــن الفضــاء V المعادلــة: $u + x = v$ تمــلك في الفضاءV حلاً وحيداً فقط $x = v + (-u)$ والذي يسمي فرق المتجهين، $v.u$ أو حاصل طرح المتجه u من المتجه V ويرمز له $v - u$.

5. $a\theta = \theta$ مهما يكن $a \in k$

البرهان:

بفرض أن u متجه اختياري من الفضاء V فإن $u+\theta=u$ وبالتالي:

$$au=a(u+\theta)=au+a\theta$$

من هذه العلاقة نستنتج أن:

$$a\theta=au-au=\theta$$

6. $0.u=\theta$ من أجل أي متجه u من الفضاء V إن 0 صفر الحقل k.

البرهان:

إن $u=1.u=(1+0)u=1.u+0.u=u+0.u$

ومنه نستنتج أن: $0u=u-u=\theta$

7. إذا كان $au=\theta$ من أجل أي مقدار عددي $a\in k$ وأي متجه $u\in V$ فإنه إما أن يكون $a=0$ أو أن يكون $u=\theta$.

البرهان:

إذا كـــان $a\neq 0$ عـــندئذ يوجد في الحقل k العنصر $a^{-1}\in k$ بحيث أن $a.a^{-1}=1$ وبالتالي يكون

$$u=1.u=a^{-1}au=a^{-1}(au)=a^{-1}\theta=\theta$$

8. $a(-u)=-au$ من أجل أي مقدار عددي $a\in K$ وأي متجه $u\in V$.

البرهان:

إن: $au+a(-n)=a[u+(-u)]=a\theta=\theta$

أي أن:

$$a(-u)=-au$$

9. $(-a)u=-au$ مهما يكن $a\in k$ ، $u\in V$

البرهان:

إن: $au+(-au)=[a+(-a)]u=0u=\theta$

أي أن: $(-au)=-au$

10. إن عملية ضرب المتجهات بمقدار عددي توزيعية بالنسبة لعملية طرح المتجهات اي أنه من أجل أي مقدار عددي a من k وأي متجهين v,u من V فإن:

$$a(u-u)=au-au$$

11. إن عمـــلية ضـــرب المــتجهات بمقدار عددي توزيعية بالنسبة لعملية طرح المقادير العددية، أي أنه من أجل أي مقدارين عددين $a,b\in k$ وأي متجه u من V فإن

$$(a-b)u=au-au$$

في الحقيقة أن:

$$(a-b)u=[(a+(-b)u]=au+(-b)u=au-bu$$

12. بما كانت $(V,+)$ زمرة تبديلية فإن العمليات في V تجري كما تجري في الزمرة. فكل متجه u من V منتظم بالنسبة لعملية الجمع بمعني أنه:

$$(\forall v_1,v_2\in V):u+v_1=u+v_2\Rightarrow v_1=v_2\,;u\in V$$

مثال (3.1.1):

إن أي حقــل k فضـــاء مـــتجهي فوق نفسه وذلك بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب المعرفتين على k.

مثال(3.1.2):

إن مجموعـــة الأعداد الحقيقية (المركبة) معرف عليها عملية الجمع العادية وعملية الضرب العادية تشكل فضاء متجهياً.

مثال (3.1.3):

مجموعـــة كـــل المصفوفات من المرتبة (m,n) فوق الحقل k أي $M_{(m,n)}(K)$ هي

فضـاء مـتجهي فـوق الحقل k وذلك بالنسبة لعمليتي جمع المصفوفات وضرب مصفوفة بمقدار عددي من الحقل k.

مثال(3.1.4):

إذا علمنا أن k^n هي مجموعة كل العناصر من الشكل:

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n); a_i \in k; i = 1,2,\cdots,n$$

وان عمـلية جمـع عنصرين من k^n وضرب عنصر من k^n بمقدار عددي من k معرفة بالشكل:

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n) \\ k(a_1, a_2, \cdots, a_n) &= (ka_1, ka_2, \cdots, k_{an})\end{aligned}$$

حيث:

$$i = 1,2,\ldots,n \qquad , \qquad k, a_i, b_i \in k$$

عندئذ يمكننا وبسهولة التأكد من أن المجموعة k^n فضاء متجهي فوق الحقل k وذلك بالنسـبة لعمليتي الجمع والضرب بعدد المعرفتين سابقاً. نذكر هنا بأن المتجه الصفري في الفضاء k^n هو $\theta = \underbrace{(0,0,\ldots,0)}_{\text{n مسقط}}$:كما أن نظير العنصر.

$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ هو $(-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$

ثانياً/ قاعدة وقياس الفضاء المتجهي (Basis and Dimension of Vector Space):

تعريف (3.2.1):

ليكـن V فضـاء مـتجهيا فـوق الحقـل k ولـتكن $v_1, v_2, \ldots, v_n$ متجهات من الفضاء $V a_1, a_2, \cdots, a_n$ مقادير عددية من الحقل k نسمى المتجه.

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

تركيـباً خطيـاً للمـتجهات $v_1, v_2, \cdots, v_n$ نسـمي $a_1, a_2, \cdots, a_n$ معاملات المتجهات $v_1, v_2, \cdots, v_n$

تعريف(3.2.2):

ليكن V فضاء متجهياً فوق الحقل k نقول عن المتجه u من V أنه متناسب مع المتجه v من V إذا وجد المقدار العددي a بحيث يكون $u = \mathrm{a}v$.

نتيجة(3.2.1):

إن المــتجه الصــفري فــي الفضـــاء V متناســب مــع أي مــتجه u من V وذلك لأن $\theta = 0u, \forall v \in V$.

نتيجة(3.2.2):

إذا كان المتجة $v \in V \ (v \neq \theta)$ متناسباً مع متجه ما u من V فإن المتجه u يكون متناسباً مــع v بمــا أن v متناســب مــع u فهذا يعني أنه يوجد المقدار العددي $\mathrm{a} \in k$ بحيث أن $v = \mathrm{a}u$ وبالتالي يكون:

$$u = \mathrm{a}^{-1}v$$

تعريف(3.2.3):

ليكــن V فضاء متجهاً فوف الحقل k ، $v_1, v_2, \cdots, v_n$ متجهات من الفضاء V نقول عن المتجه u من الفضاء V إنه تركيب خطي للمتجهات $v_1, v_2, \cdots, v_n$ (أو أن v يكتب على شكل تــركيب خطـــي للمتجهات $v_1, v_2, \cdots, v_n$) إذا وجدت المقادير العددية، $k \ni \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \cdots, \mathrm{a}_n$ وبحيث يكون:

$$v = \mathrm{a}_1 v_1 + \mathrm{a}_2 v_2 + \cdots + \mathrm{a}_n v_n$$

نتيجة(3.2.3):

إن المــتجه الصفري θ يمكن كتابته على شكل تركيب خطي لأي جملة من المتجهات $v_1, v_2, \cdots, v_n$ وذلك لأن:

$$\theta = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$$

نتيجة(3.2.4):

إذا كان المتجه v تركيباً خطياً لجملة جزئية ما $v_1, v_2, \cdots, v_s$ من جملة المتجهات $v_1, v_2, \cdots, v_n$ حيث $s \langle n$ فإنه سيكون تركيباً خطياً للجملة $v_1, v_2, \cdots, v_n$ لأن:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_s v_s$$

وبالتالي يكون:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_s v_s + o v_{s+1} + o v_{s+2} + \cdots + o v_n$$

تعريف(3.2.4):

ليكن V فضاء متجهياً فوق الحقل k- نقول عن المتجهات $v_1, v_2, \cdots, v_n \, (n \geq 1)$ من الفضاء V إنها مرتبطة خطياً (Linearly Dependent vector) إذا كان بالإمكان إيجاد المقادير العددية $a_1, a_2, \ldots, a_n \in k$ والتي أحدها على الأقل مختلف عن الصفر وحيث تتحقق من أجلها العلاقة:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = \theta \qquad (3.2.1)$$

ونقول عن المتجمعات السابقة إنها مستقلة خطياً Linearly in dependent إذا لم تكن مرتبطة خطيا، أي إذا كانت العلاقة (3.2.1) محققة فقط من أجل:

$$a_i = \theta \qquad i = (1, 2, \ldots, n)$$

نلاحظ هنا أن العلاقة (3.2.1) تصبح دوماً إذا كانت المقادير العددية a_i جميعاً أصفاراً، فإذا كانت هذه العلاقة محققة فقط من أجل هذه الحالة، أي إذا اقتضت المساواة:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = \theta$$

أن يكون: $a_1 = 0, a_2 = 0, \ldots, a_n = \theta$ فإن المتجهات $v_1, v_2, \cdots, v_n$ تكون مستقلة خطياً، أما إذا تحققت هذه العلاقة أيضاً في الحالة التي يكون فيها أحد المقادير العددية $a_1, a_2, \cdots, a_n$ مغايراً للصفر فإن المتجهات $v_1, v_2, \cdots, v_n$ تكون عندئذ مرتبطة خطياً.

نتيجة (3.2.5):

أي جملة مكونة من متجه وحيد فقط v تكون مرتبطة خطياً إذا كان $v = \theta$ وتكون مستقلة خطياً إذا كان $v \neq \theta$ لأنه من أجل $v = \theta$ فالعلاقة $av = \theta$ محققة من أجل

$v \neq \theta$ أما من أجل $v \neq \theta$ فالعلاقة $av = \theta$ محققة فقط من أجل $a = 0$.

مثال (3.2.1):

إن المـــــتجه $v = (15,-11,3,15)$ هـــــو تـــــركيب خطـــــي للمـــــتجهات $v_1 = (1,0,-1,2)$, $v_2 = (-1,2,0,3)$ $v_3(2,-1,1,4)$ وذلك لأن: $v = 2v_1 - 3v_2 + 5v_3$.

مثال(3.2.2):

إن جملة المتجهات:

$$v_1 = (1,-1,0) \quad , \quad v_2 = (0,-1,1) \quad , \quad v_3 = (2,3,1) \;, \quad v_4 = (2,-1,1)$$

مرتبطة خطياً وذلك لأن:

$$4v_1 + 2v_2 + v_3 - 3v_4 = \theta$$

مثال (3.2.3):

إن المتجهات $e_1 = (1,0,\cdots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\cdots,0)$,..., $e_n = (0,0,\cdots,1)$ من الفضاء المتجهي k^n مستقلة خطياً وذلك لأنه من العلاقة: $a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n = \theta$

نستنتج أن: $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (0,0,\cdots,0)$

أي: $a_2 = 0, a_2 = 0, \cdots, a_n = 0$

نسمي المتجهات السابقة متجهات وحدة.

مثال(3.2.4):

إن أي مـــتجهين α, β مـــن الفضاء المتجهي، المركب C فوق الحقل C يشكلان جملة مرتبطة خطياً، وذلك لأنه طالما أن $\alpha = \theta$ فإن:

$$\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\alpha$$

مثال(3.2.5):

إن المتجهين $e_1 = 1$, $e_2 = i$ من الفضاء المتجهي المركب C فوق حقل الأعداد الحقيقية

$\Re$ يشـــكلان جمـــلة مستقلة خطياً لأنه أي من المتجهين لا يمكن أن يساوي المتجه الآخر مضروباً بعدد حقيقي.

مبرهنة(3.2.1):

تكـــون جملة المتجهات $v_1, v_2, \cdots, v_n$ مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا كان أحد متجهات هذه الجملة على الأقل تركيباً خطياً لبقية متجهات الجملة.

البرهان:

- **لزوم الشرط:** لنفرض أن المجتمعات $v_1, v_2, \cdots, v_n$ مرتبطة خطياً أي أنها ترتبط مع بعضها البعض بالعلاقة:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = \theta$$

والتي يكون فيها مثلاً $a_j \neq 0$ لبعض j حيث $1 \leq j \leq n$ عندئذ يكون:

$$v_y = \left(\frac{-a_1}{a_j}\right)v_1 + \left(\frac{-a_2}{a_j}\right)v_2 + \cdots + \left(\frac{-a_{j-1}}{a_j}\right)v_{j-1}$$

وهذا يعني أن المتجه v_j هو تركيب خطي للمتجهات : $v_1, v_2, \cdots, v_{j-1}$

-**كفاية الشرط:** لنفرض مثلاً أن المتجه v_1 هو تركيب خطي لبقية متجهات الجملة أي أن:

$$v_1 = a_2 v_2 + a_3 v_3 + \cdots + a_n v_n$$

وبالتالي يكون:

$$(-1)v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \cdots + a_n v_n = \theta$$

مـــن العلاقـــة الســـابقة نلاحـــظ أن معامل المتجه v_1 مغاير للصفر، وبالتالي فإن المتجهات المذكورة مرتبطة خطياً.

نتيجة(3.2.6):

أي جملة من المتجهات تحوي المتجه الصفري تكون مرتبطة خطياً.

مبرهنة (3.2.2):

إذا كــانت جمــلة المــتجهات $v_1,v_2,\cdots,v_n$ مســتقلة خطيــاً، وجمــلة المتجهات $v_1,v_2,\cdots,v_n,u$ مرتــبطة خطيــاً (جميــع المتجهات المذكورة من فضاء متجهي واحد) عندئذ يكون المتجه u تركيباً خطياً للمتجهات $v_1,v_2,\cdots,v_n$.

البرهان:

بما أن المتجهات u ، $v_1,v_2,\cdots,v_n$ مرتبطة خطياً فإنه يمكن إيجاد المقادير العددية $a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}$ من الحقل k والتي ليست جميعها معدومة بحيث يكون:

$$a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n+a_{n+1}u_n=\theta \quad (3.2.2)$$

إن $a_{n+1}\neq 0$ لأنه لو كان $a_{n+1}=0$ لحصلنا من العلاقة السابقة على العلاقة:

$$a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n=\theta$$

والتي لا يجوز أن يكون فيها جميع المقادير العددية $a_1,a_2,....,a_n$ مساوية للصفر وبالتالي لكانت المتجهات $v_1,v_2,...,v_n$ مرتبطة خطياً. إذن وبما أن $a_{n+1}\neq 0$ فإننا نستنتج من العلاقة (3.2.2)

$$u=\left(\frac{-a_1}{a_{n+1}}\right)v_1+\left(\frac{-a_2}{a_{n+1}}\right)v_2+...+\left(\frac{-a_n}{a_{n+1}}\right)v_n$$

وهذا يعني أن المتجه u تركيب خطي للمتجهات $v_1,v_2,...,v_n$

مبرهنة (3.2.3):

تكــون جمــلة المــتجهات $v_1,v_2,...,v_n$ مرتبطة خطياً إذا وجد فيها جملة جزئية مرتبطة خطياً.

البرهان:

لــنفرض أنــه يوجد في جملة المتجهات $v_1,v_2,...,v_n$ جملة جزئية مرتبطة خطياً وبمــا أنــه يمكنــنا المبادلة بين مواضع المتجهات $v_1,v_2,...,v_n$ فإننا سنعتبر أن الجملة الجزئية المرتبطة خطياً هي، $v_1,v_2,...,v_S$ حيث $S<n$ عندما يكون:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_s v_s = \theta$$

حيث أنه ليست جميع المعاملات $a_1, a_2, ..., a_s$ مساوية للصفر وبالتالي نستطيع أن نكتب العلاقة:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_s v_s + 0v_{s+1} + ... + 0v_n = \theta$$

والتي تعني أن المتجهات $v_1, v_2, ..., v_n$ مرتبطة خطياً.

نتيجة (3.2.7):

إذا كانت المتجهات $v_1, v_2, ..., v_n$ مستقلة خطياً فإن أي جملة جزئية منها تكون مستقلة خطياً.

نتيجة (3.2.8):

أي جملة متجهات تحوي متجهين متساويين أو متجهين متناسبين تكون مرتبطة خطياً.

تعريف (3.2.5):

ليكن V فضاء متجهياً فوق الحقل K إذا كان المتجه $u \in V$ تركيباً خطياً للمتجهات $v_1, v_2, ..., v_n$ من V، فإنه من الممكن القول بأن المتجه u يعبر عنه خطياً بالمتجهات $v_1, v_2, ..., v_n$. كما وأنه يقال أن المتجهات $u_1, u_2, ..., u_n$ من الفضاء V يعبر عنها خطياً بالمتجهات $v_1, v_2, ..., v_n$ إذا كان يعبر عن كل متجه من جملة المتجهات $u_1, u_2, ..., u_s$ خطياً بالمتجهات $v_1, v_2, ..., v_n$.

مبرهنة (3.2.4):

ليكن V فضاء متجهياً فوق الحقل K، إذا كان يعبر عن جملة المتجهات $u_1, u_2, ..., u_s$ خطياً بالمتجهات $v_1, v_2, ..., v_n$ وإذا كان يعبر خطياً عن الجملة $v_1, v_2, ..., v_n$ بالمتجهات $w_1, w_2, ... w_m$ فإنه يكون بالإمكان التعبير خطياً عن جملة المتجهات $u_1, u_2, ..., u_s$ بالجملة $w_1, w_2, ... w_m$ (الجمل الثلاث من الفضاء V)

البرهان:

إن:

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, v_j \qquad ; \qquad i= 1, 2, \dots ,s \qquad (3.2.3)$$

وكذلك

$$n_j = \sum_{K=1}^{n} b_{iK}\, w_K \qquad ; \qquad j= 1, 2, \dots, n \qquad (3.2.4)$$

وبتعويض n_j بقيمتها (2.2.4) في (2.2.3) نحصل على:

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{K=1}^{m} a_{jK}\ w_k = \sum_{K=1}^{m}\left(\sum_{J=1}^{n} a_{ij}\, b_{jK}\right) w_K$$

$$= \sum_{K=1}^{m} C_K\, w_K$$

حيث C_K مقدار عددي، $K= 1, 2, \dots, m$

نتيجة (9.2.3):

لتكن لدينا جملة المتجهات الاختيارية $v_1, v_2, \dots, v_m$ والجملة الجزئية منها $v_{i1}, v_{i2}, \dots v_{iS}$ إن كل متجه من الجملة الجزئية، وباعتباره متجهاً من الجملة الاختيارية يعبر عنه خطياً بجملة المتجهات الجزئية وبالتالي فإن الجملة الاختيارية يعبر عنها خطياً بالجملة الجزئية.

مبرهنة (3.2.5):

إن كل جملة مؤلفة من S من الفضاء المتجهي n يشكل في حال كون $S > n$ جملة مرتبطة خطياً.

البرهان:

ليكن:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}) \\
v_2 &= (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}) \\
&\vdots \\
v_s \quad &(a_{1S}, a_{2S}, \dots, a_{nS})
\end{aligned}
$$

جملة متجهات اختيارية من الفضاء K'' وحيث $S > n$. ولنبرهن الآن أن هذه الجملة مرتبطة خطياً. أي لبنبرهن على وجود المقادير العددية $k_1, k_2, \dots, k_S$ والتي ليست جميعها معدومة ومن أجلها تتحقق العلاقة:

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_S v_S = \theta \qquad (3.2.5)$$

من العلاقة السابقة نحصل على جملة المعادلات الخطية المتجانسة التالية:

$$
\begin{aligned}
a_{11} k_1 + a_{12} k_2 + \dots + a_{1S} k_S &= 0 \\
a_{21} K_1 + a_{22} K_2 + \dots + a_{2S} K_S &= 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n1} k_1 + a_{n2} k_2 + \dots + a_{nS} k_S &= 0
\end{aligned}
$$

نلاحظ أن عدد معاملات هذه الجملة هو n وهو أصغر من عدد المجاهيل S لهذا فإن هذه الجملة تملك حلاً غير الحل الصفري أي إن العلاقة (2.2.5) محققة من أجل المقادير العددية $K_1, K_2, \dots m K_S$ والتي ليست جميعها معدومة.

تعريف (3.2.6):

إذا كان في الفضاء المتجه V يوجد جملة من المتجهات مستقلة خطياً ومؤلفة من n متجهاً. وإذا كانت أي جملة أخرى من الفضاء V مكونة من $n+1$ متجهاً مرتبطة خطياً عندئذ يقال بأن أبعاد الفضاء المتجه V يساوي n أو نقول أن عدد أبعاد الفضاء المتجه V يساوي n ونكتب ذلك بالشكل $dim\ V = n$ = (أو V_n).

نتيجة (3.2.10):

إن بعد الفضاء المتجهي المنتهي الأبعاد هو أكبر عدد من المتجهات المستقلة خطياً في هذا الفضاء. كما وأن أي فضاء متجهي V لا يمكن أن يكون له بعدان مختلفان الفضاء الذي يكون بعده منته يسمى فضاء منته الأبعاد، أما الفضاء الذي بعده غير منته أي الذي

يحوي جملة مستقلة خطياً مكونة من عدد غير منته من المتجهات فيسمى فضاء غير منته الأبعاد.

مثال (3.2.6):

بعـد الفضاء المتجهي المركب f فوق حقل الأعداد المركبة f يساوي 1 وذلك لأن أي عدد مركب مختلف عن الصفر a يشكل جملة مستقلة خطياً بينما أي عددين مركبين b, a فإنهما يشكلان جملة مرتبطة خطياً.

مثال (3.2.7):

إن بعد الفضاء المتجهي k^n هو n وذلك لأن جملة المتجهات:

$$e_1=(1,0,0,\ldots,0),e_2=(0,1,0,\ldots,0)\ldots\ldots e_n(0,0,\ldots,1)$$

والمكونـة كما هو موضح من n متجهاً هي جملة مستقلة خطياً، غير أن كل جملة مؤلفه من $n+1$ متجهاً تكون مرتبطة خطياً.

تعريف (3.2.7):

بفرض أن V فضاء متجهي فوق الحقل k. نسمي جملة المتجهات $v_1,v_2,\ldots,v_n$ من الفضـاء V جملة مولدة للفضاء المتجهي إذا كان أي متجه من V يكتب على شكل تركيب خطي لمتجهات هذه الجملة.

مثال (3.2.8):

إن جملة متجهات الوحدة في المثال (2.2.7) تولد الفضاء k^n.

مبرهنة (3.2.6):

بفـرض أن جملة المتجهات $v_1,v_2,\ldots,v_n$ تولد الفضاء V. فإذا كان المتجه v_i من الجملة السابقة يكتب على شكل تركيب خطي لبقية متجهات هذه الجملة فإنه يكون بالإمكان عـندئذ حذف المتجه v_i من الجملة السابقة المولدة للفضاء V والحصول على جملة مولدة جديدة للفضاء المتجهي V:

$$v_1,v_2,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},v_n$$

البرهان:

بما أن الجملة $v_1, v_2, ..., v_n$ تولد الفضاء V فهذا يعني أنه يمكن كتابة أي متجه من V على شكل تركيب خطي لمتجهات هذه الجملة وبتعويض المتجه v_i أينما وجد في كل التراكيب الخطية الموافقة لكل متجه من متجهات الفضاء V بقيمته بدلالة بقية المتجهات في الجملة المولدة نحصل على تراكيب خطية جديدة موافقة لمتجهات الفضاء V.

وذلك بدلالة متجهات الجملة المولدة باستثناء المتجه V_i.

تعريف (3.2.8):

تسمى جملة المتجهات $v_1, v_2, ..., v_n$ قاعدة للفضاء المتجهي *(Basis of vector spaces)* V إذا وفقط إذا كانت هذه الجملة مستقلة خطياً ومولدة للفضاء V.

ويرمز لهذه القاعدة بالرمز.

$$B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

مثال (3.2.3):

إن العددين $i, 1$ يشكلان جملة مستقلة خطياً في الفضاء المركب C فوق $\Re$. من ناحية أخرى فإن هذين العددين يولدان الفضاء C وذلك لأن أي عدد مركب $a+ib$ $(a, b \in \Re)$ يكتب على شكل تركيب خطي لهذين العددين. إذن فإن المتجهين $i, 1$ يشكلان قاعدة للفضاء C فوق $\Re$.

في المثال (2.2.7): إن الجملة $e_1, e_2, ..., e_n$ تشكل قاعدة للفضاء K^n وذلك لأن الجملة هذه مستقلة خطياً وتولد الفضاء k^n.

مبرهنة (3.2.7):

إن كل جملة مستقلة خطياً في الفضاء المتجهي المنته الأبعاد V مكونة من n متجها تكون قاعدة لهذا الفضاء حيث:

$$(\dim V = n)$$

البرهان:

بفــرض أن $v_1, v_2, ..., v_n$ جمــلة اختيارية من الفضاء V مستقلة خطياً، وu متجه اختياري من V.

إن جمــلة المــتجهات $v_1, v_2, ..., v_n u$ تكــون مرتبطة خطياً لأنها مكونة من $n+1$ متجهاً وبالتالي فإن:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n + a_{n+1} u = \theta \qquad (2.2.6)$$

حيــث ان أحد المقادير العددية $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$ على الأقل مختلفاً عن الصفر، إن $a_{n+1} \neq 0$ لأنه لو كان $a_{n+1} = 0$ لأصبحت العلاقة السابقة (2.2.6) على الشكل:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n = \theta$$

والــتي يجب أن يكون من أجلها أحد الأعداد، $a_1, a_2, ..., a_n$ على الأقل مختلفاً عن الصــفر وهــذا ما يناقض كون $v_1, v_2, ..., v_n$ مستقلة خطياً. إذن وبما أن $a_{n+1} \neq 0$ فإننا نحصل من العلاقة (2.2.6) على:

$$u = \left(\frac{-a_1}{a_{n+1}}\right) v_1 + \left(\frac{-a_2}{a_{n+1}}\right) v_2 + ... + \left(\frac{-a_n}{a_{n+1}}\right) v_n$$

نتيجة (3.2.11):

في الفضاء المنته الأبعاد V يوجد قاعدة واحدة على الأقل تحوي n متجهاً

حيث: $\dim V = n$

مبرهنة (3.2.8):

إذا وجد في الفضاء المتجهي V قاعدة تحوي n متجهاً فإن هذا الفضاء يكون مساوياً لــ n أي $(\dim V = n)$

البرهان:

بفرض أن جملة المتجهات:

$$v_1, v_2, \ldots, v_n \qquad (3.2.7)$$

هي قاعدة الفضاء المتجهي V. إن هذه الجملة مستقلة خطياً، ولكي نبرهن أن بعد V يساوي n يجب أن نبرهن أن أي جملة متجهات من الفضاء V مكونة من $n+1$ متجهاً تكون مرتبطة خطياً.

بفرض أن: $u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}$ جملة اختيارية من الفضاء V مكونة من $n+1$.

إن كل متجه من هذه الجملة يمكن كتابته على شكل تركيب خطي لمتجهات القاعدة.

$$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

أي أن:

$$u_i = a_{i1} v_1 + a_{i2} v_2 + \ldots + a_{in} v_n = \sum_{j=q}^{n} a_{ij} v_i, \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (3.2.8)$$

لنأخذ الآن جملة المتجهات التالية من الفضاء المتجهي $= k^n$:

$$w_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{in})$$
$$w_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$$
....
$$w_n = (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn})$$
$$w_{n+1} = (a_{(n+1)} a_{(n+1)_2}, \ldots, a_{(n+1)_2})$$

إن هذه الجملة مرتبطة خطياً (مبرهنة 3.2.5) وهذا يعني أنه يوجد في الحقل K المقادير العددية $k_1, k_2, \ldots k_n k_{n+1}$ والتي ليست جميعها معدومة، ومن أجلها تتحقق العلاقة:

$$k_1 w_1 + k_2 w_2 + \ldots + k_n w_n + k_{n+1} w_{n+1} = \theta$$

ومنها نستنتج أن:

$$\sum_{i=1}^{n+1} k_i \; a_{ij} = 0 \qquad j=1,2,\ldots,n \qquad (3.2.9)$$

والآن سنثبت أن:

$$\sum_{i=1}^{n+1} K_i u_i = k_1 u_1 + K_2 u_2 + \ldots + K_n u_n + K_{n+1} \; u_{n+1} = \theta$$

بالاستفادة من (3.2.8) و (3.2.9) نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{n+1} k_i u_i = \sum_{i=1}^{n+1} k_i \left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{a}_{ij} v_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n+1} k_i \mathrm{a}_{ij} \right) \mathrm{v}_j = \theta$$

وهكذا فقط أصبح بالإمكان صياغة تعريف بعد الفضاء المتجهي على الشكل التالي:

إن بعد الفضاء المتجهي V يساوي إلى عدد متجهات قاعدة هذا الفضاء.

نتيجة (3.2.12):

إن عدد متجهات أي مجموعة مستقلة خطياً من الفضاء المتجهي V يكون أصغر أو يساوي عدد عناصر قاعدة هذا الفضاء.

أو بكـــلام آخر، إن قاعدة الفضاء V تحوي أكبر عدد من المتجهات المستقلة خطياً في الفضاء V.

مبرهنة (3.2.9):

يمكن الحصول على قاعدة للفضاء المتجهي (ذو البعد المنتهي n) بواسطة أي جملة مســتقلة خطيــاً مــن هــذا الفضاء، وذلك بإضافة بعض متجهات هذا الفضاء إلى الجملة المستقلة خطياً.

البرهان:

نفرض أن:

$$v_1, v_2, \ldots, v_n \qquad (3.2.10)$$

جمــلة مســتقلة خطياً من الفضاء V. لو كان كل متجه من الفضاء V تركيباً خطياً لمتجهات الجملة (3.2.10) لكانت هذه الجملة قاعدة لـــ V، بفرض أنه يوجد في V المتجه v_K والذي لا يمكن أن نعبر عنه خطياً بدلالة متجهات الجملة (3.2.10) عندها فإن الجملة التالية:

$$v_1, v_2, \dots, v_K, v_{K+1}$$

تكون مستقلة خطياً لأنها لو كانت مرتبطة خطياً لكان:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_K + a_{K+1} v_{K+1} = \theta \tag{3.2.13}$$

والتي من أجلها يجب أن يكون $a_{K+1} \neq 0$ وذلك لأن الجملة (3.2.10) مستقلة خطياً. إذن من العلاقة (3.2.12) نحصل على

$$v_{K+1} = \left(\frac{-a_1}{a_{K+1}}\right) v_1 + \left(\frac{-a_2}{a_{K+1}}\right) v_2 + \dots + \left(\frac{-a_K}{a_{K+1}}\right) v_K$$

أي أن المتجه v_{K+1} يمكن كتابته على شكل تركيب خطي لمتجهات الجملة (3.2.12) إذا كان متجه من الفضاء V تركيباً خطياً لمتجهات الجملة (3.2.11) فإن الجملة هذه تكون قاعدة لـ V أما إذا كان في الفضاء V يوجد متجه v_{K+2} والذي لا يمكن أن يعبر عنه خطياً بدلالة متجهات لجملة (3.2.11) فإنه وبإضافة هذا المتجه إلى متجهات هذه الجملة (3.2.11) نحصل على جملة جديدة مستقلة خطياً من المتجهات.

$v_1, v_2, \dots, v_K, v_{K+1}, v_{K+2}$ وهكذا إن هذه العملية لا يمكن تكرارها إلى ما لا نهاية، لأنه في الفضاء المتجهي V لا يمكن أن يوجد جملة مستقلة خطياً تحوي أكثر من n متجهاً لهذا وتطبيق العملية السابقة $n\text{-}k$ مرة نحصل على جملة المتجهات المستقلة خطياً التالية:

$$v_1, v_2, \dots, v_K v_{K+1}, \dots, v_n$$

والتي بواسطتها يمكن التعبير خطياً عن أي متجه من متجهات V وهكذا فإن الجملة الأخيرة تكوّن قاعدة للفضاء V.

مبرهنة (3.2.10):

أي جملة مولدة للفضاء المتجهي V تحوي قاعدة لهذا الفضاء:

البرهان:

بفرض أن الجملة:

$v_1, v_2, \ldots v_n$ (*)

تولـد الفضــاء المــتجهي V، إذا كــانت الجملة السابقة مستقلة خطياً يكون قد تم المطـلوب. أمــا إذا كــانت مرتبطة خطياً فإن أحد عناصرها وليكن v_i مثلاً يكون تركيباً خطيــاً لــبقية متجهات الجملة وبالتالي يمكننا حذف المتجه v_i من الجملة المولدة السابقة والحصول على جملة مولدة جديدة:

$v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots v_n$ (**)

نــبدأ الآن مــن جديــد فــنقول: إذا كانت الجملة (**) مستقلة خطياً يكون قد تم المطــلوب، وإلا تكون مرتبطة خطياً وبالتالي فإن أحد متجهاتها، يكون تركيباً خطياً لبقية مــتجهات الجمــلة ويمكن حذف هذا المتجه من الجملة المولدة (**) وهكذا نصل بتطبيق العملية السابقة عدداً منتهياً من المرات إلى أن الجملة

$v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{in}$

حيث $(i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_{n-1} \le i_m)$ تولد الفضاء المتجهي V ولا يوجد فيها أي متجه يمكــن أن يكتب على شكل تركيب خطي لبقية متجهاتها فهي إذن تكون مستقلة خطياً أي أنها تشكل قاعدة للفضاء المتجهي V.

نتيجة (3.2.13):

بعــد الفضــاء المتجهي أصغر أو يساوي من عدد عناصر أي مجموعة مولدة لهذا الفضــاء كمــا وأن عــدد عناصر أي مجموعة مستقلة خطياً في فضاء متجهي V يكون أصغر أو يساوي إلى عدد أي مجموعة مولدة لهذا الفضاء.

مبرهنة (3.2.11):

أي مجموعــة مولــدة للفضــاء المــتجهي V مكونة من n متجهاً تكون قاعدة لهذا الفضاء.

البرهان:

نفــرض أن الجمــلة $v_1, v_2, \ldots, v_n$ مولدة للفضاء V، فلو كانت هذه الجملة مرتبطة

خطياً لكان أحد متجهاتها وليكن v_i مثلاً تركيباً خطياً لبقية المتجهات وفي هذه الحالة يصبح الفضاء V مولداً بالجملة:

$$v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots v_n$$

وهذا يعني أن:

$$n = \dim V \leq n-1$$

وهذا غير ممكن، إذن فالجملة $v_1, v_2, \ldots v_n$ مستقلة خطياً وبالتالي فهي تشكل قاعدة للفضاء V.

إن من الممكن، بل ومن الضروري أحياناً، كما في الصفات العامة للفضاء المتجهي، كذلك في مسائل مختلفة، أن يعرف المتجه في فضاء متجهي ما V فوق حقل K بواسطة مقادير عددية من K، وأن نعرّف العمليات على المتجهات من خلال العلميات على المقادير العددية ومن أجل هذا كان لابد من تعريف مفهوم مركبات المتجه.

بفرض أن: $\beta = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ قاعدة ما للفضاء المتجهي V عندئذ فإن كل متجه $v \in V$، يمكن أن يكتب بدلالة متجهات القاعدة أي:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$$

حيث أن $a_1, a_2, \ldots, a_n$ مقادير عددية من الحقل K وتدعى بمركبات المتجه v على القاعدة β

إن التعبير الخطي السابق للمتجه V وحيد لأنه إذا فرضنا بأنه يمكن كتابة هذا المتجه بدلالة عناصر القاعدة بطريقتين مختلفتين

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n \qquad (i)$$

$$v = a_1' v_1 + a_2' v_2 + \ldots + a_n' v_n \qquad (ii)$$

فمن العلاقتين السابقتين نستنتج أن:

$$(a_1 - a_1')v_1 + (a_2 - a_2')v_2 + \ldots + (a_n - a_n')v_n = \theta$$

وبما أن المتجهات $v_1, v_2, \ldots, v_n$ مستقلة خطياً فإننا نستنتج من العلاقة الأخيرة أن:

$$a_1 - a_1' = 0 \quad , \quad a_2 - a_2' = 0 \quad ,....... \quad , \quad a_n - a_n' = 0$$

وبالتالي فإن:

$$a_1 = a_1' \quad , a_2 = a_2' \quad ... \quad a_n = a_n'$$

أي أن الشكلين (i)، (ii) للمتجه v متطابقان.

إذن فإذا كان هناك قاعدة ما $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ للفضاء المتجهي V، فإن كل متجه v من V تقابله مجموعة مرتبة ووحيدة مؤلفة من n عنصراً $a_1, a_2, ..., a_n$ من الحقل K والتي من أجلها تتحقق المساواة:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$$

إن المقادير العددية $a_1, a_2, ..., a_n$ تسمى مركبات المتجه v على القاعدة β

مثال (3.2.10):

في الفضاء المتجهي C=V فوق الحقل $\Re$، وكما رأينا سابقاً أن المتجهين i, 1 قاعدة لهذا الفضاء.

إن مركبات المتجه $v = a + ib$ على هذه القاعدة هي الأعداد b,a.

مثال (3.2.11):

إن مركبات المتجه $v = (a_1 + a_2, ..., a_n)$ من الفضاء K^n على القاعدة $\beta = \{e_1, e_2, ... e_n\}$ هي: $a_1, a_2, ..., a_n$ وذلك لأن:

$$v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + ... + a_n e_n$$

فيما يلي سندرس العلاقة بين عدة قواعد لفضاء المتجهي. لقد برهنا فيما سبق على أن أي قاعدة للفضاء المتجي V تحتوي على n متجهاً. وبقي أن نجيب على السؤال الهام التالي:

كم عدد القواعد لفضاء متجهي ما منته الأبعاد V؟ وما هي العلاقة التي تربط بينهما؟

من أجـل الإجابة على هذا السؤال لنفرض أنه معلوم لدينا القاعدتين التاليتين في الفضاء المتجهي V حيث dim V=n

$$v_1, v_2, \ldots, v_n \tag{3.2.11}$$

$$v'_1, v'_2, \ldots, v'_n \tag{3.2.12}$$

إن كـل متجه v'_i حيث i=1, 2, ..., n من الفضاء المتجهي V يكتب وبشكل وحيد على شكل تركيب خطي لمتجهات القاعدة (3.2.11) أي:

$$\begin{aligned}
v'_1 &= a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots + a_{1n}v_n \\
v'_2 &= a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{2n}v_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
v'_n &= a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \ldots + a_{nn}v_n
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

إن المصفوفة:

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

والـتي عناصرها هي مركبات متجهات القاعدة (3.2.12) على القاعدة (3.2.11) تسـمى مصفوفة الانتقال من القاعدة (3.2.11) إلى القاعدة (3.2.12) هذا ويمكن كتابة (3.2.13) اختصاراً على الشكل

$$v'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, v_j \quad ; \quad i = 1.2....,n$$

وهـذه المسـاواة تعبر عن العلاقة بين القاعدتين (3.2.11)، (3.2.12) ومصفوفة الانتقال T ويمكن التعبير عن هذه العلاقة أيضاً بالعلاقة المصفوفية التالية:

$$\begin{bmatrix} \dot{v_1} \\ \dot{v_2} \\ \vdots \\ \dot{v_n} \end{bmatrix} = T. \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

مثال (3.2.12):

ليكن لدينا القاعدتين التاليتين في الفضاء المتجهي $\Re^2$:

$$P_1(1.1) \quad , \quad P_2(2.2) \quad , \quad e_1(1.0) \quad , \quad e_2(0.1)$$

أوجد مصفوفة الانتقال من القاعدة الأولى إلى القاعدة الثانية.

الحل:

إن:

$$P_1 = 1.e_1 + 1.e_2 = e_1 + e_2$$
$$P_2 = -1.e_1 + 0.e_2 = -e_1 + 0.e_2$$

ومنه نجد أن:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

مبرهنة (3.2.12):

إن مصـــفوفة الانتقال من قاعدة ما لفضاء متجهي منته الأبعاد V إلى قاعدة أخرى هي مصفوفة نظامية حيث: dim V=n

البرهان:

لنفرض أن مصفوفة الانتقال T من القاعدة الأولى (3.2.11) إلى القاعدة (3.2.12) غير نظامية أي أن: det T=0، لهذا فإن صفوف هذه المصفوفة ستكون مرتبطة خطياً، أي أنـــه في الحقل K توجد المقادير العددية $k_1, k_2, \ldots, k_n$ والتي أحدها على الأقل لا يساوي الصفر، وبحيث تتحقق العلاقة:

$$k_1(a_{11},a_{12},\dots,a_{1n}) + k_2(a_{21},a_{22},\dots,a_{2n}) + \dots + k_n(a_{n1},a_{n2},\dots,a_{nn}) = (0,0,\dots,0)$$

أي أن:

$$\begin{aligned} k_1a_{11} + k_2a_{21} + \dots + k_na_{n1} &= 0 \\ k_1a_{12} + k_2a_{22} + \dots + k_na_{n2} &= 0 \\ &\cdots\cdots \\ k_1a_{n1} + k_2a_{n2} + \dots + k_na_{nn} &= 0 \end{aligned} \qquad (3.2.14)$$

وبالاستفادة من (3.2.13)، (3.2.14) نستنتج أن:

$$\begin{aligned} k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n &= k_1(a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n) + \\ & k_2(a_{21}v_1 + a_{2}v_2 + \dots + a_{2n}v_n) + \\ & \dots + k_n(a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \dots + a_{nn}v_n) \\ &= (k_1a_{11} + k_2a_{12} + \dots + k_na_{n1})v_1 + (k_1a_{12} + k_2a_{22} + \dots + k_na_{n2})v_2 + \dots \\ & \dots + (k_1a_{1n} + k_2a_{2n} + \dots + k_na_{nn})v_n = 0 \end{aligned}$$

أي العلاقة التالية محققة:

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n = 0$$

والتي من أجلها بعض المقادير العددية $k_1,k_2,\dots,k_n$ مختلفة عن الصفر بما يناقض كون جملة المتجهات $v_1,v_2,\dots,v_n$ هي قاعدة للفضاء V. إذن فمصفوفة الانتقال T من القاعدة الأولى إلى القاعدة الثانية هي مصفوفة نظامية وهو المطلوب.

مبرهنة (3.2.13):

أي مصفوفة نظامية من المرتبة n فوق الحقل K يمكن اعتبارها مصفوفة انتقال من قاعدة ما للفضاء المتجهي V فوق الحقل K إلى قاعدة أخرى.

البرهان:

نفرض أنه معطى لدينا القاعدة $v_1,v_2,\dots,v_n$ للفضاء المتجهي V والمصفوفة النظامية

$$S=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{11} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

لنأخذ جملة المتجهات:

(*) $$u_1, u_2, \dots, u_n$$

والمعرفة كما يلي:

$$\begin{aligned} u_1 &= b_{11}v_1 + b_{12}v_2 + \dots + b_{1n}v_n \\ u_2 &= b_n v_1 + b_{12}v_2 + \dots + b_{2n}v_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_n &= b_{n1}v_1 + b_{n2}v_2 + \dots + b_{nn}v_n \end{aligned}$$

إن جمــلة المتجهات (*) مستقلة خطياً لأنها لو كانت مرتبطة خطياً لكانت صفوف مركبات متجهات وهي: $[S_1].[S_2]...[S_n]$ مرتبطة خطياً وبالتالي لكانت محددة المصفوفة S مساوية للصفر، وهذا يناقض الفرض حيث S مصفوفة نظامية إذن وبما أن الجملة (*) مســتقلة خطيــاً ومؤلفة من n متجهاً فهي تشكل قاعدة للفضاء المتجهي V المنتهي البعد وبالــتالي فــإن المصفوفة هي مصفوفة انتقال من القاعدة الأولى إلى القاعدة الثانية وهو المطلوب.

نتيجة (3.2.14):

مــن المبرهنة السابقة نستنتج بأن عدد القواعد المختلفة لأي فضاء متجهي V منته الأبعـــاد dim V=n فوق الحقل k مساوٍ إلى عدد المصفوفات النظامية من المرتبة n والتي عناصرها من الحقل k.

سوف نقوم الآن بدراسة العلاقة بين مركبات متجه ما من الفضاء المتجهي V على قــاعدتين مختلفــتين لهذا الفضاء بفرض أن v متجه اختياري من الفضاء V وأن مركبات هــذا المــتجه عــلى القــاعدة (3.2.11) هــي: $a_1, a_2, \dots, a_n$ وعلى القاعدة (2.2.12) $a'_1, a'_1, \dots, a'_n$ أي أن:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$$
$$v = a_1' v_1' + a_2' v_2' + \ldots + a_n' v_n'$$

إذا عوضنا في العلاقة الثانية كل من المتجهات $v_1', v_2', \ldots, v_n'$ بقيمها بدلالة $v_1, v_2, \ldots, v_n$ وذلك من العلاقة (3.2.13) نحصل على:

$$v = (a_1' a_{11} + a_2' a_{21} + \ldots + a_n' a_{n1}) v_1 + (a_1' a_{12} + a_2' a_{22} + \ldots + a_n' a_{n2}) v_2 + \ldots + (a_1' a_{1n} + a_2' a_{2n} + \ldots + a_n' a_{nn}) v_n$$

بما أن مركبات المتجه v على القاعدة (3.2.11) وحيدة، إذن فمن العلاقة الأخيرة نستنتج أن:

$$a_1 = a_1' a_{11} + a_2' a_{21} + \ldots + a_n' a_{n1}$$
$$a_2 = a_1' a_{12} + a_2' a_{22} + \ldots + a_n' a_{n2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n = a_1' a_{1n} + a_2' a_{2n} + \ldots + a_n' a_{nn}$$

يمكن صياغة العلاقة السابقة، اختصاراً على شكل علاقة مصفوفية:

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_1', a_2', \ldots, a_n'] \cdot T$$

أي أن مصفوفة الصف لمركبات المتجه v على القاعدة $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ تساوي جراء مصفوفة الصف لمركبات المتجه v على القاعدة $\beta' = \{v_1', v_2', \ldots, v_n'\}$ بمصفوفة الانتقال من القاعدة β إلى القاعدة β'.

وبما أن المصفوفة T نظامية فإنه يوجد لها معكوس T^{-1} وبالتالي فمن العلاقة الأخيرة نحصل على:

$$[a_1', a_2', \ldots a_n'] = [a_1, a_2, \ldots, a_n] T^{-1}$$

مثال (3.2.13):

إن جملة المتجهات $e_1 = (1,0,0)\,, e_2 = (0.0.1)\,, e_3 = (0.0.1)$ هي قاعدة للفضاء المتجهي

إن المتجهات:

$$e_1' = e_1 + e_2 - e_3$$
$$e_2' = e_1 - e_2$$
$$e_3' = -e_1$$

تشكل قاعدة أيضاً لـ $\Re^3$. كما وأن المصفوفة:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة الانتقال من القاعدة $\beta = \{e_2, e_2, e_3\}$ إلى القاعدة $\beta' = \{e_1', e_2', e_3'\}$.

وأن:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

إن مركبات المتجه $v=(2,-1,3)$ على القاعدة $\beta = \{e_2, e_2, e_3\}$ هي: $a_1 = 2,\ a_2 = -1,\ a_3 = 3$ أما مركباته على القاعدة $\beta' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ يمكن الحصول عليها بواسطة العلاقة الأخيرة أي:

$$[a_1', a_2', a_3'] = [2,1,3]\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = [-3,-4,-7]$$

أي أن:

$$a_1' = -3 \quad , \quad a_2' = -4 \quad , \quad a_3' = -7$$

وهي مركبات المتجه على القاعدة $\beta' = \{e_1', e_2', e_3'\}$.

ثالثاً/ الفضاء المتجهي الجزئي (Subvector spaces):

تعريف (3.3.1):

ليكن V فضاء متجهيا فوق الحقل V_1, k مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء V

نسمي المجموعة الجزئية غير الخالية V_1 فضاء متجهياً جزئياً في الفضاء V إذا كانت تشكل فضاء متجهياً بالنسبة للعمليات المعرفة على الفضاء V.

إن هذا يعني أن المجموعة V_1 تحقق بديهيات الفضاء المتجهي حيث أن عمليتي جمع عناصره وضربها بمقادير عددية من الحقل k معرفة تماماً كما هي بالنسبة لعناصر الفضاء المتجهي V.

مبرهنة (3.3.1):

تكون المجموعة الجزئية V_1 من الفضاء المتجهي V فضاء متجهياً جزئياً في V إذا وفقط إذا تحقق الشرطان:

(i) مهما يكن $v.u$ من V_1 فإن $u+v$ من V_1.

(ii) من أجل أي عدد $k \in K$ وأي متجه v من V_1 فإن $= V_1 \mathrm{K}\, v$.

البرهان:

لزوم الشرط: واضح جداً.

كفايـة الشرط: في المجموعة V_1 عملية الجمع معرفة، إن عملية جمع عناصر المجموعة V_1 تـتم وذلك على اعتبار أن هذه العناصر هي متجهات من الفضاء V. كما وأن حاصل جمع عنصرين من V_1 هو عنصر من V_1 حسب (i). عملية الجمع هذه تجميعية وتبديلية وذلك لأن هاتين الخاصتين محققتان من أجل عملية جمع المتجهات على الفضاءV إن المتجه الصفري θ موجود في المجموعة V_1 وذلك لأنه من أجل المتجه $v \in V_1$ يكون وحسب الشرط (ii) $0.v = \theta \in V_1$ ومن أجل أي متجه $v \in V_1$ يكون وحسب الشرط (ii) $(-1)v = -v \in V_1$من الشرط الثاني ينتج أن عملية ضرب عناصر المجموعة V_1 بمقادير عددية من الحقل k معرفة. كما وأن بقية شروط الفضاء المتجهي محققة وهو المطلوب.

ملاحظة:

ممكن جمع الشرطين (i) (ii) بالشرط:

$$u.v \in V_1 \quad , \quad a.b \in k \quad , \quad av + bu \in V_1$$

مبرهنة (3.3.2):

ليكـــن V_1 فضاء متجهياً جزئياً من الفضـاء المتجهي V. إن بعد الفضـاء V_1 أصغر أو يساوي بعد V أي

$$\dim V_1 \leq \dim V$$

البرهان:

طالمـــا أن أي جمــــلة مستقلة خطياً في الفضـاء الجزئي V_1 هي، وفي نفس الوقت جمــلة مســـتقلة خطيـــاً في الفضاء المتجهي V، ولهذا فإن أكبر عدد ممكن من المتجهات المستقلة خطياً في k لن يتعدى بعد الفضاء المتجهي V وبالتالي فإن

$$\dim V_1 \leq \dim V$$

مثال (3.3.1):

المجموعة $\{0\}$ والتي تتكون فقط من المتجه الصفري θ هي فضاء متجهي جزئي مـــن أي فضـــاء متجهي V. ويسمى الفضاء المتجهي الجزئي الصفري، في هذا الفضاء الجـــزئي لا يوجـــد أي جمـــلة مستقلة خطياً لهذا فإن قاعدته هي المجموعة الخالية وبعده يساوي الصفر.

تعريف (3.3.2):

بفـــرض أن $V_1, V_2, \ldots$ عـــدد محـــدود أو غير محدود من الفضاءات الجزئية من الفضـــاء المتجهي V، إن مجموعة المتجهات W والتي ينتمي كل متجه من متجهاتها إلى جميـــع الفضاءات الجزئية $V_1, V_2, V_3, \ldots$ تسمى تقاطع هذه الفضاءات الجزئية ويرمز لها بالرمز:

$$W = V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap \ldots$$

مبرهنة (3.3.3):

إن تقـــاطع أي مجموعة من الفضاءات الجزئية $V_1, V_2, V_3, \ldots$ من الفضاء المتجهي V هو فضاء متجهي جزئي من V.

البرهان:

لنرمز إلى تقاطع الفضاءات الجزئية $V_1,V_2,V_3,...$ بالرمز W إن W مجموعة غير خالية لأن المتجه الصفري θ ينتمي إلى كل من الفضاءات الجزئية $V_1,V_2,V_3,...$ وبالتالي فهو ينتمي إلى W.

إذا كانت المتجهات $v_1 . v_2 . \in W$ فإنهما ينتميان إلى كل من الفضاءات الجزئية $V_1,V_2,V_3,...$ وبالتالي فإن مجموعهما $v_1 + v_2$ ينتمي إلى $V_i (i = 1, 2, ...)$ ومن ثم فالشعاع $v_1 + v_2 \in W$ وأخيراً إذا كان α مقدار عددي اختياري من الحقل v,k متجه ما من التقاطع W فإن v سيكون موجوداً في كل من الفضاءات الجزئية $V_i (i = 1, 2, ...)$ ومن ثم فإن αv سوف ينتمي إلى كل من V_i مهما تكن i، وبالتالي فإن المتجه $\alpha v \in W$ إذن W هو فضاء متجهي جزئي من الفضاء V.

تعريف (3.3.3):

تسمى مجموع الفضاءات الجزئية $v_1,v_2,...,v_S$ ويرمز لهذا المجموع بالرمز:

$$U = V_1 + V_2 + ... + V_S$$

مبرهنة (3.3.4):

إن مجموع عدد محدد من الفضاءات الجزئية $V_1,V_2,...,V_S$ من الفضاء V يشكل فضاءاً متجهياً جزئياً من V.

البرهان:

بفرض أن v,v_1 متجهان اختياريان من V مجموع الفضاءات الجزئية $V_1,V_2,...,V_n$

$$v = v_1 + v_2 + ... + v_S \qquad , \qquad v^1 = v_1^1 + v_2^1 + ... + v_S^1$$

حيث $\upsilon_i \cdot \upsilon_i^1$ متجهات من $V_i (i = 1,2,...,S)$ أن:

$$v + v' = (v_1 + v_1') + (v_2 + v_2') + \ldots + (v_S + v_S')$$

حيث أن $v_i + v_i' \in V_i$ $(i = 1,2,\ldots,S)$ وبالتالي فإن:

واخيراً فإن من أجل أي متجه $v \in U$ وأي مقدار عدد $k \in K$ يكون:

$kv = kv_1 + kv_2 + \ldots + kv_S$ حيث $kv_i \in V_i$ $(i = 1,2,\ldots,S)$، وبالتالي فإن:

$kv \in U$ وبذلك يكون U فضاء متجهياً جزئياً من V.

نتيجة:

إن أي فضـــاء جزئي V_i حيث i=1 , 2, ..., S محتوي في الفضاء الجزئي U وذلك لأن أي متجه $v_1 \in V_i$ يمكن كتابته على الشكل

$$v_i = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{i-1} + v_i + \theta_{i+1} + \ldots + \theta_S$$

حيث $\theta_1 (i \neq j)$ هو المتجه الصفري في الفضاء الجزئي V_j.

مبرهنة (3.3.5):

ليكن V_1 ، V_2 فضائين جزئيين من الفضاء المتجهي V، عندئذ يكون..

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2$$

البرهان:

بفــرض أن V_1 ، V_2 فضـــاءان جزئيان اختياريان من الفضاء المتجهي V. إذا كان أحـــد هذين الفضائين الجزئيين هو الفضاء الجزئي الصفري فإن المبرهنة تكون صحيحة.

لنفرض أن $V_1 \neq \theta$ ، $V_2 \neq \theta$ وأن $V_0 = V_1 \cap V_2$ و $V = V_1 + V_2$

ولنفرض أيضاً أن:

$$\dim V = m \quad , \quad \dim V_1 = m_1 \quad , \quad \dim V_2 = m_2 \quad , \quad \dim V_0 = m_0$$

وبفرض أن جملة المتجهات التالية هي قاعدة الفضاء الجزئي V_0:

$$v_1, v_2, .. v_{m0} \qquad (*)$$

بما أن V_0 محتوي في كل من الفضائين الجزئيين V_2,V_1 فإن القاعدة (*) لـ V_0 تكون محتواة في كل من V_2,V_1 وبما أن القاعدة (*) هي عبارة عن جملة مستقلة خطياً. إذن فإنه يمكن توسيعهما لتصبح قاعدة لكل من الفضائين الجزئيين V_2,V_1 وبناء على ذلك فإن الجملة التالية:

$$v_1, v_2, \ldots, v_{m0}, u_{m_{0+1}}, \ldots, u_{m1} \tag{3.3.1}$$

تكون قاعدة للفضاء الجزئي V_1.

$$v_1, v_2, \ldots, v_{m0}, w_{m_{0+1}}, \ldots, w_{m2} \tag{3.3.2}$$

تكون قاعدة للفضاء الجزئي V_2.

لنبرهن الآن أن جملة المتجهات:

$$v_1, v_2, \ldots, v_{m0}, u_{m_{0+1}}, \ldots, u_{m1}, w_{m0+1}, \ldots, w_{m2} \tag{3.3.3}$$

تشكل قاعدة للفضاء V. من أجل هذا سوف نبرهن أن الجملة (3.3.3) تولد الفضاء V ليكن v متجهاً اختيارياً من V أن $v = v_1 + v_2$ حيث أن $v_2, v_1 \in V_1 \in V_2$ أن V_1 يكتب على شكل تركيب خطي لمتجهات الجملة (3.3.1). v_2 يكتب على شكل تركيب خطي لمتجهات الجملة (3.3.2) ولهذا فإنه يمكن كتابة كل من المتجهين v_2, v_1 وبالتالي المتجه v يكتب على شكل تركيب خطي الجملة (2.3.3) ولنبرهن الآن إن الجملة (3.3.3) مستقلة خطياً من العلاقة:

$$\begin{aligned} &a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_{m0} v_{m0} + b_{m_{0+1}} + \ldots + b_{m1} u_{m1} + C_{m_{0+1}} W_{m_{0+1}} + \ldots \\ &+ C_{m2} W_{m2} = \theta \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

نستنتج أن:

$$\begin{aligned} &a_1 v_1 + \ldots + a_{m0} v_{m0} + b_{m0+1} u_{m0+1} + b_{m1} u_{m1} = -C_{m0+1} W_{m0+1} \\ &- \ldots - C_{m2} W_{m2} \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

إن الشعاع:

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_{m0} v_{m0} + b_{m0+1} u_{m0+1} + \dots + b_{m1} u_{m1}$$
$$= -C_{m0+1} W_{mo+1} - \dots - C_{m2} W_{m2} \qquad (3.3.6)$$

ينتمي إلى كل من الفضائين الجزئيين V_2, V_1 وبالتالي فهو ينتمي إلى تقاطعهما V_0 إذن هو تركيب خطي لمتجهات القاعدة (*) أي:

$$\upsilon = k_1 v_1 + K_2 \upsilon_2 + \dots + k_{m0}\, \upsilon_{m0} \qquad (3.3.7)$$

حيث أن $k_1, k_2, \dots, k_m$ مقادير عددية من الحقل k من (2.3.8.7)

نستنتج:

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_{mo} v_{mo} = -C_{m0+1} W_{mo+1} - \dots - C_{m2} W_{m2}$$

أي أن:

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_{m0} v_{mo} + C_{m0+1} W_{m=+1} + \dots + C_{m2} W_{m2} = \theta$$

وبما أن الجملة (2.3.2) مستقلة خطياً فمن العلاقة السابقة نستنتج أن:

$$C_{m0+1} = C_{m0+2} = \dots = C_{m2} = 0$$

وبالتعويض في (3.3.5) نحصل على:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_{m0} v_{mo} + b_{mo+1} u_{mo+1} + \dots + b_{m1} u_{m1} = 0$$

ومن هذه العلاقة أيضاً ومن كون الجملة (3.3.1) مستقلة خطياً نستنتج أن:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{m0} = b_{m0+1} = \dots = b_{m1} = C_{mo+1} = \dots = C_{m2} = 0$$

أي أن الجملة (3.3.3) مستقلة خطياً. إذن فهي قاعدة للفضاء المتجهي الجزئي V وبالتالي فإن عدد متجهات هذه القاعدة والتي تساوي $m_0 + (m_1 - m_0) + (m_2 - m_0)$ هو قياس V والذي يساوي بالفرض m إذن فإن:

$$m = m_1 + m_2 + \dots - m_0$$

أي أن: $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$ هو المطلوب.

تعريف (3.3.4):

يسمى المجموع $w = V_1 + V_2 + ... + V_n$ مجموعاً مباشراً للفضاءات الجزئية $V_1, V_2, ..., V_n$ من الفضاء V إذا كان أي متجه w من W يكتب بصورة وحيدة على الشكل:

$$w = v_1 + v_2 + ... + v_n \quad : \quad v_i \in V_i \;, \; I = 1,2,...,n$$

إذا كان W مجموعاً مباشراً للفضاءات الجزئية $V_1, V_2, ..., V_n$ فإن W يكتب على شكل

$$W = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_n$$

مبرهنة (3.3.6):

بفرض أن $V_1, V_2, ..., V_n$ فضاءات متجهية جزئية من الفضاء V، إن الشرط اللازم والكافي لكي يكون المجموع $W = V_1 + V_2 + ... + V_n$ مجموعاً مباشراً هو أن يكون:

$$v_k \cap \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} v_i \right) = \{\theta\} \; : \; (1,2...,n)$$

البرهان:

لزوم الشرط: لنفرض بأن w مجموعاً مباشراً للفضاءات الجزئية $V_1, V_2, ..., V_n$ ونبرهن على أن:

$$V_k \cap \left(\sum_{i=1}^{n} V_i \right) = \{\theta\}$$

ومن أجل ذلك نأخذ متجهاً اختيارياً من التقاطع:

$$\forall \upsilon \in V_k \cap \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} V_i \right)$$

فإن: $v \in V_k \Leftarrow v = v_k$ وكذلك:

$v \in \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} Vi$ يؤدي إلى أن:

$$\upsilon = v_1 + v_2 + \ldots + v_{k-1} + v_k + v_{k+1} + \ldots + v_n = \theta$$

ومن العلاقتين السابقتين نجد:

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_{k-1} + v_k + v_{k+1} + \ldots + v_n = \theta$$

وبما أن المتجه الصفري يكتب بصورة وحيدة على الشكل:

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n \quad : \quad \theta \in V_i , \quad i = 1,2,\ldots,n$$

فإننا نستنتج أن:

$$v_1 = v_2 = \ldots = v_k = \ldots = v_n = \theta$$

ومنه فإن: $v = v_k = \theta$ وبالتالي يكون

$$(i = 1,2,\ldots,n) \quad V_k \cap \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} V_i \right) = \{\theta\}$$

كفايـــة الشـــرط: لنفرض الآن بأن التقاطع يساوي $\{\theta\}$ ولنبرهن على أن υ من w يكتب بصورة وحيدة على الشكل

$$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_n \quad : \quad v_i \in V_i : (i = 1,2,\ldots,n)$$

في الواقع لو كان: $v = v_1' + v_2' + v_3' + \ldots v_n'$ شكلاً آخر للمتجه V لوجدنا أن:

$$v_k - v_k' = \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (v_i - v_i') \right) \in \left(V_k \cap \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} V_i \right)$$

ومنه نستنتج أن:

$v_k - v_k' = \theta$ أي أن:

حيث $v_k = v_k'$ $\qquad k = (1,2,\dots,n)$

مبرهنة (3.3.7):

إن بعد المجموع المباشر $w = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$ للفضاءات الجزئية $V_1, V_2, \dots, V_n$ في الفضاء المتجهي V يساوي مجموع أبعاد هذه الفضاءات الجزئية أي:

$$\dim W = \dim V_1 + \dim V_2 + \dots + \dim V_n$$

البرهان:

إذا كان n=2 (n عدد الفضاءات الجزئية التي تشكل المجموع المباشر) فإن المبرهنة صحيحة حسب المبرهنة (3.3.3). لنفرض أن المبرهنة صحيحة من أجل n-1 ولنبرهن صحتها من أجل n.

فإذا رمزنا بـ $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_{n-1}$ بالرمز $\overline{V}$ نستطيع أن نكتب W على الشكل:

$$W = \overline{V} \oplus V_n$$

وبالتالي فإنه يكون:

$$\dim W = \dim \overline{V} + \dim V_n$$

وبما أن:

$$\dim \overline{V} = \dim \mathrm{V}_1 + \dim V_2 + \dots + \dim V_{n-1}$$

نستنتج أن:

$$\dim W = \dim \mathrm{V}_1 + \dim V_2 + \dots + \dim V_{n-1} + \dim V_n$$

رابعاً: الارتباط الخطي والاستقلال الخطي لصفوف (لأعمدة) مصفوفة:

مقدمة:

لقد أطلقنا على مصفوفة من الشكل: $A = [\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_n]$ اسم مصفوفة صف حيث $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_n$ مقادير عددية من k. ثم رأينا أن مجموعة المصفوفات من الشكل السابق

مــزودة بعمليتي جمع المصفوفات وضرب المصفوفات بمقدار عددي من k تشكل فضاءً متجهياً. لهذا فإن مصفوفة الصف السابقة تسمى متجهاً صفياً وبالتالي يمكننا التحدث عن الارتباط والاستقلال الخطي لعدة متجهات صفية لها نفس المرتبة.

ونفــس الكــلام تماماً يمكن أن يقال من أجل متجهات العمود التي لها نفس المرتبة لنأخذ الآن مصفوفة مستطيلة A من الشكل:

$$A = \left[a_{i,j}\right]_{(m,n)}$$

إن هــذه المصـــفوفة تحــوي m صفاً، n عموداً، إنه يمكن اعتبار كل من صفوف (أعمدة) هذه المصفوفة متجهياً. وبالتالي فإنه يمكننا التحدث عن استقلال صفوف (أعمدة) المصفوفة A وارتباطها الخطي.

تعريف (3.4.1):

نقــول عن المصفوفتين A,B إنهما متكافئتان خطياً إذا كان كل صف من صفوف A تركيــباً خطيــاً لصـــفوف المصفوفة B وكل صف من صفوف B تركيباً خطياً لصفوف المصفوفة A.

تعريف (3.4.2):

لــتكن لدينا المصفوفة $A = \left[a_{ij}\right]_{(m,n)}$ وليكن Δ صغيراً من المرتبة n في المصفوفة A وليكــن Δ' صغيراً آخر في المصفوفة A من مرتبة أكبر أو تساوي k نقول عن Δ' إنــه صغير محيط بــ Δ إذا كانت جميع الصفوف والأعمدة التي يتوضع عليها Δ جزء من الصفوف والأعمدة التي يتوضع عليها Δ'.

مبرهنة (3.4.1):

ليكــن Δ صـــغيراً مختلفاً عن الصفر من المرتبة k في المصفوفة A ولتكن جميع الصغائر من المرتبة k+1 المحيطة بــ Δ معدومة عندئذ فإن الصفوف التي يتوضع عليها الصـــغير Δ تكــون مستقلة خطياً وكل صف من الصفوف الباقية في المصفوفة A يكتب على شكل تركيب خطي لهذه الصفوف.

البرهان:

لتكن المصفوفة $A=\left[a_{ij}\right]_{(m,n)}$ ولنفرض أن المحددة Δ تقع في الزاوية اليسرى العليا من Aأي:

$$\Delta=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \quad , \quad \Delta \neq 0$$

إن افتراض أن Δ يقع في الزاوية اليسرى العليا ممكن لأنه إذا كان متوضعاً في مكان آخر فإنه بإجراء تحويلات بسيطة على A وأعمدتها، يمكن الحصول على مصفوفة جديدة مكافئة للمصفوفة الأولى وبحيث يقع Δ في الزاوية اليسرى العليا من هذه المصفوفة الجديدة وإذا كانت المبرهنة صحيحة من أجل المصفوفة الجديدة فإنما تكون صحيحة من أجل المصفوفة القديمة. لنبرهن الآن أن الصفوف الأولى التي عددها يساوي k مستقلة خطياً. لذلك نفرض أنها مرتبطة خطياً. إذن فإن أحد هذه الصفوف يكتب على شكل تركيب خطي للصفوف الباقية. وبالتالي فإنه وحسب خواص المحددات ينتج أن $\Delta=0$ وهذا مخالف للفرض. إذن فإن الصفوف الأولى والتي عددها k مستقلة خطياً.

لنبرهن الآن على الشق الثاني من المبرهنة. من أجل هذا ليكن $K<S\leq n, k<n\leq m$ ولنشكل المحددة التي مرتبتها k+1 التالية:

$$\Delta'=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1S} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & a_{2S} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_{kS} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & a_{nS} \end{bmatrix}$$

إن Δ' يساوي الصفر من أجل جميع قيم r .s المحددتين بالمتراجحتين السابقتين وذلك لأن Δ' صغير من المرتبة k+1 وتحيط بالصغير Δ وحسب فرض المبرهنة يكون $\Delta'=0$

لننشر الآن المحددة Δ' وفق عناصر العمود الأخير فنجد أن:

$$\Delta' = a_{1S}A_{1S} + a_{2S}A_{2S} + \dots + a_{kS}A_{kS} + A_{rS}A_{rS} = 0$$

إن $A_{rS} = \Delta \neq 0$ وبالتالي فإنه يمكن كتابة المساواة الأخيرة السابقة على الشكل:

$$a_{rS} = \left(-\frac{A_{1S}}{\Delta}\right)a_{1S} + \left(-\frac{A_{2S}}{\Delta}\right)a_{2S} + \dots + \left(-\frac{A_{KS}}{\Delta}\right)A_{KS}$$

أو على الشكل:

$$a_{rS} = \alpha_1\, a_{1S} + \alpha_2 a_{2S} + \dots + \alpha_K\, a_{KS} \quad : \quad \alpha_i = -\frac{A_{1S}}{\Delta}\ ,\ i = 1,2,\dots,k$$

بإعطاء S القيم $1, 2, \dots, n$ نحصل على العلاقات:

$$\begin{aligned}
a_{r1} &= \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \dots + \alpha_k a_{k1} \\
a_{r2} &= \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \dots + \alpha_k a_{k2} \ : \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{rn} &= \alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \dots + \alpha_k a_{kn}
\end{aligned}$$

وهذا يعني أن الصف الذي رقمه r يكتب على شكل تركيب خطي للصفوف الأولى التي عددها يساوي k.

مبرهنة (3.4.2):

ليكــن Δ صــغيراً مختلفاً عن الصفر من المرتبة k في المصفوفة A ولتكن جميع الصــغائر مــن المرتبة k+1 المحيطة بـــ Δ معدومة، عندئذ تكون الأعمدة التي. يوضع عليها Δ مستقلة خطياً، وكل عمود من الأعمدة الباقية يكتب على شكل تركيب خطي لهذه الأعمدة.

البرهان:

لــبرهان هــذه المبرهنة يكفي أن نأخذ منقول المصفوفة A فنحصل على مصفوفة جديدة A^T، ثم نطبق المبرهنة (2.4.1) على A^T فنحصل على المطلوب.

تعريف (3.4.3):

نقول عن المصفوفة A أن لها رتبة تساوي k إذا كان:

(i) يوجد صغير واحد على الأقل من المرتبة k قيمته لا تساوي صفر.

(ii) كل صغير من المرتبة k+1 يساوي صفر.

يرمز لرتبة المصفوفة A بالرمز r(A)

(Ran k of matrix A)

نتيجة (3.4.1):

في المصفوفة A والتي رتبتها تساوي k جميع الصغائر والتي مرتبة كل منها أكبر من k تكون معدومة.

فـي الحقيقة، وبما أن كل صغير في المصفوفة A من المرتبة k+1 يساوي الصفر فـإن كـل صـغير في A من المرتبة k+2 يساوي الصفر لأن قيمته تساوي إلى مجموع جـداءات عناصر من A في صغائر من المرتبة k+1 والتي قيمة كل منها تساوي الصفر، وهكذا يمكننا البرهان أن كل الصغائر في المصفوفة A من المرتبة k+3 ، k+4، ... تكون معدومة. مما سبق نرى أنه يمكننا إعطاء صياغة أخرى لرتبة مصفوفة وذلك كما يلي:

إن رتبة المصفوفة A تساوي رتبة أكبر صغير غير معدوم في المصفوفة A.

مثال (3.4.1):

إن رتـبة مصـفوفة $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ تسـاوي الواحد لأنه يوجد في هذه المصفوفة عناصـر غير معدومة وكل منها يشكل صغيراً من المرتبة الأولى في حين أن محددة هذه المصفوفة معدومة وهي من المرتبة الثانية.

مثال (3.2.4):

إن رتبة المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & -4 & 6\end{bmatrix}$$

تساوي 2 لأنه يوجد في هذه المصفوفة الصغير

$\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ غير المعدوم في حين أن محددة المصفوفة A تساوي الصفر.

مثال (3.4.3):

إن رتبة المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

تساوي 3 لأن محددة المصفوفة A من المرتبة الثالثة ولا تساوي الصفر.

مبرهنة (3.3.4):

إن رتبة المصفوفة $A=\left[a_{ij}\right]_{(m,n)}$ تساوي أكبر عدد من صفوفها المستقلة خطياً.

البرهان:

بفــرض أن رتبة A تساوي k، فهذا يعني أنه يوجد في هذه المصفوفة صغير واحد عــلى الأقــل من المرتبة k غير معدوم، بينما جميع الصغائر من المرتبة k+1 وما فوق معدومة، أي أنه يوجد في المصفوفة k, A صفاً مستقلاً خطياً وهي المصفوف التي يتوضع عــليها الصــغير غيــر المعــدوم، والتي بدلالتها يعبر خطياً عن أي صف التي صفوف المصفوفة A الأخرى، إن هذه الصفوف تشكل جملة أعظميه من الصفوف المستقلة خطيا A وذلك لأنه بإضافة أي صف من صفوف A إلى هذه الجملة نحصل على جملة مرتبطة خطياً.

مبرهنة (3.4.4):

إن رتبة المصفوفة $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ تساوي أكبر عدد أعمدتها المستقلة خطياً.

مبرهنة (3.4.5):

إن رتبتي أي مصفوفتين متكافئتين خطياً متساويتان.

البرهان:

بفـرض أن $\beta.A$ مصـــفوفتان متكافئتان خطياً وأن رتبة المصفوفة β تساوي r، نهـذا يعني أن β تحوي جملة مكونة من V صفاً مستقلاً خطياً، وأن بقية صفوفها تكتب علـى شـكل تركيب خطي لصفوف هذه الجملة، وبالتالي فإن صفوف المصفوفة A تكتب أيضـاً عـلى شكل تركيب خطي لصفوف هذه الجملة، وهذا يعني أن رتبة المصفوفة A ليسـت أكبر من r، وبنفس الطريقة فإنه يمكن البرهان على أن رتبة المصفوفة β ليست أكبر من رتبة المصفوفة A وبالتالي فإن رتبة المصفوفة A تساوي رتبة β.

نتيجة (3.4.2):

بإجـراء أي تحويل بسيط على صفوف (أعمدة) مصفوفة ما نحصل على مصفوفة مكافئة خطياً للمصفوفة الأصلية.

إن هذا الأمر واضح جداً.

تعريف (3.4.4):

إن المصفوفة ذات الشكل:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} & c_{1,k+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2k} & c_{2,k+1} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{kk} & c_{k,k+1} & \cdots & c_{kn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

حيث: $c_{11} \neq 0 \quad , \quad c_{22} \neq 0 \quad , \quad c_{kk} \neq 0$

تسمى مصفوفة متدرجة.

نتيجة (3.4.3):

إن رتبة المصفوفة المتدرجة تساوي إلى عدد الصفوف غير المعدومة فيها. بسهولة يمكن التأكد من أن رتبة المصفوفة السابقة تساوي n لأنه في الحقيقة إن الصغير.

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{kk} \end{bmatrix}$$

مختلف عن الصفر وقيمته تساوي $c_{11}c_{22}...c_{kk}$ في حين أن جميع الصغائر من المرتبة k+1 وما فوق تساوي الصفر لأن كلا منها يحتوي على الأقل صفاً واحداً جميع عناصره مساوية للصفر.

مبرهنة (3.4.6):

أي مصفوفة يمكن تحويلها بإجراء عدد من التحويلات على صفوفها (أعمدتها) إلى مصفوفة متدرجة.

البرهان:

إذا كانت المصفوفة لا تساوي المصفوفة الصفرية، فإنها تحوي عنصراً مختلفاً عن الصفر، وهذا العنصر يمكن نقله بإجراء عدد من التحويلات البسيطة على صفوف المصفوفة، وعلى أعمدتها إلى الزاوية اليسرى العليا، وهكذا لنفرض أنه لدينا المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

حيث: $a \neq 0$

بإضافة الصف الأول إلى الصف الثاني مضروباً بـ $-a_{21}/a_{11}$ وإلى الصف الثالث مضروباً بـ $-a_{31}/a_{11}$.

وهكذا نحصل على المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a'_{m2} & a'_{m3} & \cdots & a'_{mn} \end{bmatrix}$$

مساوية للمصفوفة الصفرية يكون قد تم المطلوب وإلا فإننا نقوم بالمبادلة بين صفوف المصفوفة (*) وأعمدتها إلى أن نحصل على مصفوفة يكون فيها في موضع العنصر a'_{22} عنصر مختلف عن الصفر وبعد ذلك نضيف إلى الصف الثالث الصف الثاني بـ $-a'_{32}/a'_{22}$ وهكذا نحصل على المصفوفة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a'_{m3} & \cdots & a'_{mn} \end{bmatrix} \qquad (**)$$

إذا كانت المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} a'_{33} & \cdots & a'_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مساوية للمصفوفة الصفرية يكون قد تم المطلوب وإلا فإننا نتابع العلمية السابقة على المصفوفة (**) إلى أن نحصل على مصفوفة متدرجة.

نتيجة (3.4.4):

من هذه المبرهنة نستنتج أنه لا تتغير رتبة مصفوفة إذا طبقنا عليها تحويلات بسيطة (أولية)

مثال (3.4.4):

عيّن رتبة المصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

نلاحظ ان محددة هذه المصفوفة تساوي الصفر أي $\det A = 0$، أي ان رتبة المصفوفة A أقل من 3، للبحث عن أحد المحددات الصفري ذو الدرجة الأقل من 3 وغير المعدومة مثلاً:

$$\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix} \neq 0$$

ورتبة المصفوفة A تساوي 2

إذا أخذنا المصفوفة A وطبقنا عليها تحويلات بسيطة، بضرب الصف الأول بـ 1 - وإضافته للثاني نحصل على:

$$\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad (*)$$

نبادل بين الصفين الثاني والثالث ثم نضرب الصف الثاني بـ 2- ونضيفه إلى الصف الأخير، أو نضرب الصف الثاني في المصفوفة (*) بـ $-\frac{1}{2}$ ونضيفه إلى الصف الثالث نحصل على

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ورتبة هذه المصفوفة كما نلاحظ تساوي 2

مثال (3.4.5):

أوجد رتبة المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} -2r_1 + r_2 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

إذن رتبة المصفوفة A تساوي 2

مثال (3.4.6):

ليكن لدينا الشعاعان:

$u_1 = (1,1) \quad , \quad u_2 = (-1,2)$

هل هما مستقلان خطياً.

الحل:

نـأخذ الشـعاعين السـابقين ونجعـلهما صفين على مصفوفة، ثم نطبق على هذه المصفوفة تحويلات بسيطة.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad r_1 + r_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

إن رتـبة هذه المصفوفة تساوي 2، وهذا يعني أن عدد الصفوف المستقلة خطياً في هذه المصفوفة يساوي 2 وبالتالي فإن الشعاعين u_1, u_2 مستقلان خطياً.

مثال (3.4.7):

لتكن جملة الأشعة $u_1 = (1.1.1)$, $u_2 = (-1.2.1)$, $u_3 = (1.4.3)$

إن:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 + r_2 \\ \sim \\ -r_1 + r_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{-r_2 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إذن فـــإن رتـــبة المصـــفوفة الموافقة لجملة الأشعة المعطاة تساوي 2، أي ان عدد الصـــفوف المســتقلة خطياً في المصفوفة A يساوي عدد 2 وبالتالي عدد الأشعة المستقلة خطياً في الجملة المعطاة يساوي 2 وهذا يعني أن جملة الأشعة المعطاة مرتبطة خطياً.

تعريف (3.4.4):

نقــول عن شعاعين v_1, v_2 من الفضاء الشعاعي V فوق الحقل k أنهما متعامدان (Orthogonal) إذا كان جداؤهما الداخلي (inner preduct) يساوي الصفر.

مثال (3.4.8):

المـــتجهان $e_2 = (0,1)$, $e_1 = (1,0)$ فـــي الفضـــاء المـــتجي R^2 هما متجهان متعامدان لأن

$$e_1.e_2 = 0$$

كما أن مجموعة المتجهات:

$$e_1 = (1,0,...,0) \ . \ e_2 = (0,1,0,...,0),...,e_n = (0,0,...,1)$$

هي متجهات متعامدة في الفضاء المتجهي $\Re^n$

تعريف (3.4.5):

نقــول عــن مجموعة متجهات $v_1, v_2,...,v_n$ من الفضاء المتجهي V إنما متعامدة (أي: مجموعة الأشعة السابقة تكون متعامدة مثنى مثنى).

تعريف (3.4.6):

المصـــفوفة المـــربعة A التي تحقق الخاصة $A^{-1} = A^{T}$ نسميها مصفوفة متعامدة (Orthogonal matrix) من هذا التعريف نستنتج أن المصفوفة المربعة A تكون متعامدة إذا وفقط إذا كان:

$$A . A^{T} = A^{T} . A = E$$

مثال (3.4.9):

إذن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة متعامدة

لأن:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A^{T}$$

من الملاحظ أن محددة المصفوفة المتعامدة يساوي 1 أو 1− دوماً.

تمارين

1- بيّن فيما إذا كان المتجهان u, v مرتبطين خطياً أم لا في كل من الحالات الآتية:

أ) $v=(0,-3)$ ، $u=(0,1)$

ب) $v=(0,0,-3)$ ، $u=(1,0,0)$

ج) $v= x^3+4X+3$ ، $u= x^3+\frac{1}{2}+x^2$

د) $v= x^3+4x+3$ ، $u= x^3+3x+4$

هـ) $v=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ ، $u=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

2- برهن فيما إذا كانت المتجهات التالية من $\Re^4$ مرتبطة خطياً أم لا.

أ) $(23, 4, 9, 2)$ ، $(7, 5-, 8, 3)$ ، $(4, 1-, 3, 1)$

ب) $(4, 1, 6-, 3)$ ، $(3-, 0, 1, 2)$ ، $(1, 4, 2-, 1)$

3- برهن أن:

المتجهين $(2, -1+i)$ ، $(1-i, i)$ مرتبطان خطياً في الفضاء المتجهي C فوق الحقل C (C هو حقل الأعداد المركبة).

4- بفرض أن u, v, w متجهات خطياً برهن أن:

أ) المتجهات $u+w$ ، $u-v-w$ مستقلة خطياً.

ب) المتجهات $u+3v-w$ ، $v+w$ ، $u+v-3w$ مرتبطة خطياً.

5- بفرض أن $v_1+v_2+\ldots+v_n$ مستقلة خطياً برهن أن:

أ) جملة المتجهات $a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_nv_n$ مستقلة خطياً حيث أن كلاً من $a_i \neq 0$.

ب) المتجهات $v_1,\ldots,v_{i-1},w,v_{i+1},\ldots,v_n$ مستقلة خطياً حيث:

$w = b_1v_1 + ... + b_iv_i + ... + b_nv_n$ حيث $b_i \neq 0$

6- ليكن $v = (a, b)$ ، $w = (c, d)$ متجهين من $\Re^2$ ، برهن أن جملة المتجهين v, w تكون مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا كان

$$a\,d - b\,c = 0$$

7- برهن أن كلاً من جمل المتجهات التالية تشكل قاعدة لـ $\Re^3$ ثم أوجد مركبات المتجهين.

$x_1 = (6 ، 2 ، -7)$ ، $x_2 = (6 ، 9 ، 19)$ على كل من هذه القواعد:

1. $a_1 = (1 ، 2 ، 3)$ ، $a_2 = (1 ، 1 ، 2)$ ، $a_3 = (1 ، 1 ، 1)$

2. $a_1 = (1 ، -1 ، 1)$ ، $a_2 = (3 ، 2 ، -5)$ ، $a_3 = (2 ، 1 ، -3)$

8- برهن أن كلاً من الجمل التالية تشكل قاعدة لـ $\Re^4$ ثم أوجد مركبات المتجه $u = (1 ، 2 ، 3 ، 4)$ على كل منهم

1. $a_1 = (1 ، 0 ، -1 ، 0)$ ، $a_2 = (1 ، 0 ، 1 ، 0)$ ، $a_3 = (0 ، 1 ، 0 ، -1)$ ، $a_4 = (0 ، 1 ، 0 ، 1)$

2. $a_1 = (0 ، 1 ، 2 ، 3)$ ، $a_2 = (1 ، 0 ، 2 ، 3)$ ، $a_3 = (1 ، 2 ، 0 ، 3)$ ، $a_4 = (1 ، 2 ، 3 ، 0)$

9- برهن أن جمل المتجهات التالية تشكل فضاءات متجهية جزئية

أ) جميع المتجهات من k^n ، والتي يكون في كل منها المسقطان الأول والأخير متساويان.

ب) جميع المتجهات من k^n ، والتي تكون فيها المساقط ذات الأدلة الزوجية أصفاراً.

ج) جميع المتجهات من k^n ، والتي تكون فيها المساقط ذات الأدلة الزوجية متساوية.

د) جميع المتجهات من k^n ، والتي تكون من الشكل:

$(\alpha,\beta,\alpha,\alpha,\beta ...)$

حيث α,β مقادير عددية اختيارية من k.

10- بفــرض أن V هو الفضاء المتجهي $M_{(n,n)}$ (k) برهن أن W هو فضاء جزئي من V حيث:

أ) w مؤلفة من جميع المصفوفات المتناظرة.

ب) w مؤلفة من جميع المصفوفات المتبادلة مع مصفوفة معطاة A.

11- ليكن V هو الفضاء المتجهي المؤلف من كثيرات الحدود:

$$a_0 + a_1 + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

والــتي معاملاتهــا أعداد حقيقية. برهن فيما إذا كان w فضاء جزئياً من V أم في كل من الحالات الآتية:

أ) w مؤلفة من جميع كثيرات الحدود ذات المعاملات الصحيحة.

ب) w مؤلفة من جميع كثيرات الحدود التي درجة كل منها أصغر أو يساوي 3.

12- ليكــن V هــو الفضاء المتجهي $\Re^3$. بيّن أن w فضاء جزئياً من $\Re^3$ في كل من الحالات التالية:

أ) $w = \{(a,b,c),\ a \geq 0\}$

ب) $w = \{(a,b,c), a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}$

13- بفــرض أن V هو الفضاء المتجهي $M_{(2,2)}(\Re)$ برهن أن w ليس فضاء جزئياً من V في كل الحالات التالية:

أ) w مؤلفة من جميع المصفوفات التي محددها يساوي الصفر.

ب) w مؤلف من جميع المصفوفات التي تحقق الشرط $A^2 = A$

14- أوجد عدد أبعاد قاعدة الفضاءات الجزئية المولدة لجمل المتجهات التالية:

أ) $a_1 = (1, 0, 0, -1)$ ، $a_2 = (2, 1, 1, 0)$ ، $a_3 = (1, 1, 1, 1)$ ، $a_4 = (1, 2, 3, 4)$ ، $a_5 = (0, 1, 2, 3)$

ب) $a_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$ ، $a_2 = (1, 1, -1, -1, -1)$ ، $a_3 = (1, 1, 5, 5, 2)$ ، $a_4 = (1, -1, -1, 0, 0)$ ، $a_5 = (2, 2, 0, 0, -1)$

15- بفرض أن الفضاء المتجهي الجزئي w_1 محتوى في الفضاء الجزئي w_2 برهن أن:

$$\dim w_1 \le \dim w_2$$

- برهن أن الشرط اللازم والكافي حتى يكون $\dim w_1 = \dim w_2$ هو أن يكون:

$$w_1 = w_2$$

16- أوجـد مصـــفوفة الانتقال T من القاعدة (1) إلى القاعدة (2) في كل من التمرينين (9،8) ثـم أوجـد مركبات كل من المتجهين x_1, x_2 على القاعدة (2) في التمرين (8) وذلـك باستخدام المصفوفة T، وكذلك مركبات المتجه x في التمرين (9) على القاعدة (2) باستخدام مصفوفة الانتقال T.

17- بـرهن أنه إذا كان مجموع بعدي فضائيين جزئيين من الفضاء المتجهي V أكثر من بعـد V فـإن هذين الفضائين الجزئيين يحتويان على الأقل متجهاً واحداً مشتركاً غير المتجه الصفري.

18- بفـرض أن w ،V فضـــاءان جزئيان من الفضاء $\Re^3$ قياس كل منهما يساوي (2) برهن أن:

$$V \cap w \neq \theta$$

19- أوجـد $\dim(u+w)$ ، $\dim(V \cap w)$ حيـث V ،w مولـدان بالجملتين B,A على الترتيب في كل من الحالتين التاليتين:

أ) $A = \{(1,2,1), (1,1,-1), (1,3,3)\}$
$B = \{(2,3,-1), (1,2,2), (1,1,-3)\}$

ب) $A = \{(1,2,1,-2), (2,3,1,0), (1,2,2,-3)\}$
$B = \{(1,1,1,1), (1,0,1,-1), (1,3,0,-4)\}$

20- ليكن V فضاء متجهياً مولداً بالمتجهات $X_1 = \sin x , X_2 = \cos x$

والمطلوب:

(a) بيّن أن $v_2 = 3\cos x$ ، $v_1 = 2\sin x + \cos x$ تشكل قاعدة لـ V

(b) أوجد مصفوفة الانتقال من القاعدة $B' = \{v_1', v_2'$ إلى القاعدة $B = \{v_1, v_2\}$ ثم مصفوفة الانتقال من القاعدة $B = \{v_1, v_2\}$ إلى القاعدة $B' = \{v_1', v_2'$ ماذا تلاحظ؟

22- لنفرض أن $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ قاعدة الفضاء المتجهي $\mathfrak{R}^4$ وليكن α عدد حقيقي كيفي ولتكن جملة المتجهات S

$$(S)\begin{cases} v_1 = e_1 + \alpha e_2 + \alpha^2 e_3 + \alpha^3 e_4 \\ v_2 = \alpha e_1 + \alpha^2 e_2 + \alpha^3 e_3 + e_4 \\ v_3 = \alpha^2 e_1 + \alpha^3 e_2 + e_3 + \alpha e_4 \\ v_4 = \alpha^3 e_1 + e_2 + \alpha e_3 + \alpha^2 e_4 \\ \quad v_5 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \end{cases}$$

المطلوب:

(i) هل S جملة مستقلة خطياً.

(ii) أوجد علاقة بين عناصر S لا تحوي الأشعة $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

(iii) أحسب الأشعة الأربعة e_1, e_2, e_3, e_4 بدلالة عناصر S.

(iv) إذا كان α عدداً عددياً. أدرس بحسب القيم المختلفة التي يمكن إعطاؤها لـ α رتبة الجملة S.

أعد السؤال السابق نفسه عندما يكون α عدداً مركباً.

Chapter 4: الفصل الرابع

التطبيقات (التحويلات) الخطية

Linear mapping

أولاً: التطبيق (التحويل الخطي) (*Linear mapping*):

تمهيد:

لتكن B, A مجموعتين اختياريتين، ولنفرض أنه من أجل كل عنصر a من A يوجد عنصر محدد ووحيد من المجموعة B.

إن العلاقة f والتي تحدد من أجل كل عنصر من عناصر A عنصراً وحيداً ومحدداً من B تسمى تطبيقاً من المجموعة A إلى المجموعة B ويعبر عن ذلك بـــ

$$A \xrightarrow{f} B \quad \text{أو} \quad f = A \to B$$

ويرمـــز بـــ $f(\text{a})$ لذلك العنصر B والذي يحدده التطبيق f من أجل العنصر a من A، ويسمى قيمة f عند a، أو صورة a وفق f.

تعريف (4.1.1):

ليكـــن U ، V فضـــائيين متجهين فوق الحقل k، وليكن f تطبيقاً من U إلى V يسمى التطبيق f تطبيقاً خطياً إذا حقق الشرطين التاليين:

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \qquad (1)$$

$$f(\alpha u) = \alpha f(u) \qquad (2)$$

وذلك مهما يكن المتجهان v ، u من U، α من الحقل k إذا كان a ، b مقدارين عددين من k ، u ، v متجهين من U فإننا نجد بتطبيق الشرطين (1)، (2) أن:

$$f(\text{a}u + bv) = f(\text{a}u) + f(bv) = \text{a}f(u) + bf(v)$$

نلاحظ أن العلاقة:

$$f(\text{a}\,u + b\,v) = \text{a}\,f(u) + b\,f(v)$$

تعـــرف تمامـــاً التطـــبيقي الخطـــي، ولذلك فإن هذه العلاقة تستخدم وفي كثير من الأحيان بدلاً من الشرطين (1)، (2).

وبشـــكل عـــام، أيـــا كـــانت المقادير العددية $\text{a}_1, \text{a}_2, \ldots, \text{a}_n$ من الحقل k والأشعة

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ من الفضاء الشعاعي U فإنه يكون:

$$f(a_1 u_1, a_2 u_2, \ldots, a_n u_n) = a_1 f(u_1) + a_2 f(u_2) + \ldots + a_n f(u_n)$$

نتيجة (4.1.1):

إذا كان $\alpha = 0$ فمن الشرط الثاني نستنتج أن:

$$f(ou) = of(u) \quad ; \quad u \in U$$

وبالتالي فإن:

$$f(0_r) = 0_v$$

حيث 0_r المتجه في U ، 0_v المتجه في V.

مثال (4.1.1):

ليكن U فضاء متجهياً فوق الحقل k. إن التطبيق f حيث:

$$f : U \to U$$

والمعـرّفة بالشـكل: $f(u) = u$ مهمـا تكـن u مـن U، يسمى التطبيق المطابق *(indentity mapping)* ويرمز له بالرمز

$$I : U \to U$$

إن التطبيق المطابق هو تطبيق خطي، وذلك لأن:

$$I(u + v) = u + X = I(u) + I(v)$$
$$I(\alpha u) = \alpha u = \alpha u(u) , \forall \alpha \in k, u.v \in U$$

مثال (4.1.2):

بفرض أن U . V فضاءان متجهان فوق الحقل k، إن التطبيق

$$f : U \to V$$

والمعرف بالشكل:

$f(u) = \alpha$ مهما نكن $u \in U$ ، α عدد ثابت هو تطبيق غير خطي لأن:

$$f(u_1+u_2)=a$$

وكذلك $f(u_1)+f(u_2)=a+a=2a$ وبالتالي فإن:

$$f(u_1+u_2)\neq f(u_1)+f(u_2)$$

نسمي هذا التطبيق بالتطبيق الثابت.

مثال (4.1.3):

ليكن U ،V فضائيين متجهين فوق الحقل k إن التطبيق:

$$f:U\to V$$

والمعرّف بالشكل:

$$f(u)=oV$$

حيث o_V هو المتجه الصفري في الفضاء V، يسمى التطبيق الصفري ونرمز له بالرمز

$$O:V\to V$$

إن التطبيق الصفري هو تطبيق خطي وذلك لأن:

$$0(u_1+u_2)=0_V=0_V+0_V=0(u_1)+0(u_2)$$
$$0(\alpha u)=0_V=\alpha\, 0_V=\alpha\, 0_V=\alpha\, 0(u)$$

وذلك مهما يكن

u_1,u_2 من U، α من k

مبرهنة (4.1.1):

ليكن U ،V فضائين متجهين فوق الحقل k، ولتكن جملة المتجهات $u_1,u_2,\dots,u_n$ قاعدة للفضاء المتجهي U، $v_1,v_2,v_3,\dots,v_n$ متجهات اختيارية من U عندئذ يوجد تطبيق خطي وحيد

$$f: U\to V$$

بحيث يكون:

$$f(u_1)=v_1 \quad , \quad f(u_1)=v_2 \quad , \quad f(u_n)=v_n$$

البرهان:

لنبرهن أولاً على وجود التطبيق $f: U \to V$ بحيث يكون $f(u_i)=v_i$ حيث $i=1,$ $2, \ldots, n$ بفرض u متجهاً اختياريا من U، فإن V يمكن كتابته كتركيب خطي بالنسبة لمتجهات القاعدة في V أي على الشكل:

$$u=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\ldots+\alpha_n(u_n) \qquad (*)$$

حيث $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ مقادير عددية من الحقل k.

الآن لنعرف التطبيق:

$$f: U \to V$$

بالشكل:

$$f(u)=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+\alpha_n v_n \,,\forall u \in U$$

إن هذا التطبيق معرف تماماً وذلك لأن المقادير العددية $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ وحيدة من أجل كل متجه u من متجهات الفضاء U بالنسبة لقاعدة هذا الفضاء.

أما بالنسبة للمتجهات $u_1,u_2,\ldots,u_n$ فإن:

$$u_i=0\,u_1+0\,u_2+\ldots+0_{i-1}+1u_1+0\,u_{i+1}+\ldots+0\,u_n$$

وبالتالي يكون:

أي أن:

$$f(u_i)=0\,v_i+\ldots+0\,v_{i-1}+1\,v_1+0\,v_{i+1}+\ldots+0\,v_n$$
$$f(u_i)=v_i$$

حيث أن: $i=1, 2, \ldots, n$ هذا يعني أن التطبيق f موجود لنبرهن على أن f خطي.

من أجل ذلك أي متجهين $u, u^{'}$ من الفضاء المتجهي U يكون:

$$u=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\ldots+\alpha_n u_n$$
$$u^{'}=\beta_1 u_1+\beta_2 u_2+\ldots+\beta_n u_n$$

من العلاقتين السابقتين نستنتج أن:

$$u+u' = (\alpha_1+\beta_1)u_1 + (\alpha_2+\beta_2)u_2 + \dots + (\alpha_n+\beta_n)u_n$$

ومن ثم فإنه يكون:

$$\begin{aligned} f(u+u') &= (\alpha_1+\beta_1)u_1 + (\alpha_2+\beta_2)u_2 + \dots + (\alpha_n+\beta_n)u_n \\ &= (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n + (\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n) \\ &= f(u) + f(u') \end{aligned}$$

بفرض أن u متجه اختياري من U عندئذ:

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$$

وبالتالي يكون:

$$g(\alpha u) = \alpha(\alpha_1 u_1 + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = \alpha\, f(u)$$

حيث α مقدار عددي من الحقل k

إن التطبيق f وحيد لأنه لو فرضنا أنه يوجد تطبيق آخر

$$g: U \to V$$

بحيث يكون:

$$g(u_i) = v_i \quad : \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

وبفرض أن U متجه اختياري من U فإنه يكون:

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$$

حيث $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in k$ من ثم:

$$\begin{aligned} g(u) &= g(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n) \\ &= \alpha_1 g(u_1) + \alpha_2 g(u_2) + \dots + \alpha_n g_n \\ &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = f(u) \end{aligned}$$

وبذلك يتم برهان المبرهنة.

تعريف (4.1.2):

ليكـن U ،V فضائين متجهين فوق الحقل k، وليكن $f: U \to V$ تطبيقاً خطياً. نسمى

مجموعة المتجهات u من U والتي من أجلها يكون

$$f(u) = o_V$$

نواة (*kernel*) التطبيق الخطي f، ويرمز لها بالرمز $\ker f$ ونكتب:

$$\ker f = \{u \in U \ : \ \ f(u) = 0_V \}$$

حيث 0_V هو المتجه الصفري V

تعريف (4.1.3):

ليكن U, V فضائين متجهين فوق الحقل k. وليكن:

$$f: U \to V$$

تطبيقاً خطياً. إن الصورة (*Image*) المباشرة لـ U وفق التطبيق f ونرمز لها بالرمز $Im\, f$ نعرفها كما يلي:

$$\operatorname{Im} f = \{v \in V : f(u) = v : u \in U\}$$

مبرهنة (4.1.2):

ليكن U, V فضائين متجهين فوق الحقل. والتطبيق الخطي

$$f: U \to V$$

إن: (أ) $Im\, f$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء V.

(ب) $\ker f$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء U.

البرهان:

أ) إن $\operatorname{Im} f \neq \phi$ ، لأنه وبما أن $f(0_u) = 0_V$ فإن:

$\theta_V \in \operatorname{Im} f$ لنفرض أن v_1, v_2 متجهان اختياريان من الفضاء المتجهي V، α_1, α_2 مقداريـن عدديين من الحقل k. إذن فمن أجل المتجهين v_1, v_2 من V يوجد في الفضاء المتجهي U المتجهين u_1, u_2

بحيث أن:

$f(u_1)=v_1$ ، $f(u_2)=v_2$

ومن ثم فإن:

$$f(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2)=\alpha_1 f(u_1)+\alpha_2 f(u_2)=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2\in \mathrm{Im}\, f$$

(ب) $\ker f\neq\phi$ وذلك لأن $f(0_u)=0_v$ وبالتالي فإن $0_u\in\ker f$

لنفرض أن u_1, u_2 متجهان اختياريان من $\ker f$، α_1,α_2 مقداران عدديان من الحقل k

$$f(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2)=\alpha_1 f(u_1)+\alpha_2 f(u_2)=\alpha_1 0_v+\alpha_2 0_v=0_v$$

وبالتالي يكون:

$$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2\in\ker f$$

مبرهنة (4.1.3):

ليكن U, V فضاءين متجهين فوق الحقل k، وليكن:

$$f: U\to V$$

تطبيقاً خطياً. إذا كانت جملة المتجهات $u_1,u_2,\dots,u_n$ تولد الفضاء U فإن الجملة $f(u_1),f(u_2),\dots,f(u_n)$ تولد الفضاء المتجهي الجزئي $Im\, f$ من V.

البرهان:

ليكن v متجهاً اختيارياً من $Im\, f$، عندئذ فإنه يوجد المتجه u من U بحيث أن: وبما أن المتجه u يمكن كتابته على شكل تركيب خطي لمتجهات الجملة المولدة للفضاء U أي:

$$u=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\dots+\alpha_n u_n$$

حيث $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ مقادير عددية من الحقل k. ومن ثم فإن:

$$v=f(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\dots+\alpha_n u_n)=\alpha_1 f(u_1)+\alpha_2 f(u_2)+\dots+\alpha_n f(u_n)$$

وهذا يعني أن المتجهات $f(u_1), f(u_2),\dots, f(u_n)$ تولد الفضاء المتجهي $Im\, f$

مبرهنة (4.1.4):

ليكـــن U ,V فضائين متجهين منتهي الأبعاد فوق الحقل k وليكن $f: U \to V$ تطبيقاً خطياً للفضاء المتجهي U في الفضاء المتجهي V عندئذ:

$$\dim U = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$$

البرهان:

بفـــرض أن $\dim u = n$، بما أن $\ker f$ فضاء متجهي جزئي من U فإن بعده سيكون منتهياً، m مثلاً ويحقق العلاقة:

$$\dim \ker f = m \leq n$$

ولبرهان صحة هذه المبرهنة يكفي أن نبرهن أن:

$$\dim \ker f = n - m$$

بفـــرض أن الجملة $u_1, u_2, ..., u_m$ قاعدة لـــ $\ker \ f$، وبما أن هذه الجملة هي جملة مستقلة خطياً من الفضاء U، فإنه يمكن توسيعها لتصبح قاعدة لـــ U من الشكل:

$$u_1, u_2, ..., u_m, u_{m+1}, ... u_n$$

وسوف نبرهن أن جملة:

$$f(u_{m+1}), f(u_{m+2}), ..., f(u_n)$$

والمؤلفة من $(n-m)$ متجهياً، تشكل قاعدة للفضاء الجزئي $\operatorname{Im} f$ من العلاقة:

$$\alpha_{m+1}\ f(u_{m+1}) + \alpha_{m+2}\ f(u_{m+2}) + ... + \alpha_n\ f(u_n) = 0$$

نستنتج أن:

$$f(\alpha_{m+1}\ u_{m+1} + \alpha_{m+2}\ u_{m+2} + ... + \alpha_n u_n) = 0$$

فهذا يعني أن:

$$(a_{m+1}\ u_{m+1} + a_{m+2}\ u_{m+2} + ... + \alpha_n\ u_n) \in \ker f$$

وبالتالي فإنه يكون بالإمكان كتابة المتجه:

$$\alpha_{m+1}\ u_{m+1} + \alpha_{m+2}\ u_{m+2} + ... + \alpha_n u_n$$

على شـكل تركيب خطي لمتجهات الجملة $u_1, u_2, ..., u_m$ كونها تشكل قاعدة لـ

إذاً

أي أن:

$$\alpha_{m+1} u_{m+1} + \alpha_{m+2} u_{m+2} + ... + \alpha_n u_n = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_m$$

وبالتالي يكون:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_m u_m + (-\alpha_{m+1}) u_{m+1} + ... + (-\alpha_n) u_n = 0_u$$

إن المـتجهات $u_1, u_2, ..., u_m, u_{m+1}, ..., u_n$ مسـتقلة خطياً لكونها قاعدة للفضاء U

بالاستنتج من العلاقة السابقة أن:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = \alpha_{m+1} = ... = \alpha_n = 0$$

وبالتالي فإن جملة المتجهات $f(u_{m+1}), f(u_{m+2}), ..., f(u_n)$ مستقلة خطياً ليكن

متجهاً اختيارياً من $Im f$، عندئذ يوجد متجه u من U بحيث يكون $f(u) = v$

إن المتجه $u \in U$ يكتب على شكل تركيب خطي لمتجهات قاعدة الفضاء U أي:

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_m u_m + \alpha_{m+1} u_{m+1} + ... + \alpha_n u_n$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned} v &= f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_m u_m + \alpha_{m+1} u_{m+1} + ... + \alpha_n u_n) \\ &= \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + ... + \alpha_m f(u_m) + \alpha_{m+1} f(u_{m+1}) + ... + \alpha_n f(u_n) \\ &= \alpha_1 .0_V + \alpha_2 0_V + ... + \alpha_M 0_V + \alpha_{M+1} f(u_{m+1}) + ... + \alpha_n f(u_n) \end{aligned}$$

ومنه نجد:

$$v = \alpha_{m+1} f(u_{m+1}) + ... + \alpha_n f(u_n)$$

أي أن الجمـلـة $f(u_{m+1}), f(u_{m+2}), ..., f(u_n)$ تولـد الفضاء المتجهي $\mathrm{Im} f$ إذن

هي تشكل قاعدة لهذا الفضاء الجزئي. وهذا ما يلزم برهانه.

تعريف (4.1.4):

ليكن $f: U \to V$ تطبيقاً خطياً من الفضاء المتجهي U إلى الفضاء المتجهي V نقول

بالـــتعريف أن رتبة التطبيق الخطي f هي بعد الفضاء المتجهي الجزئي $Im\, f$ وترمز لرتبة التطبيق f بالرمز $rank\, f$ ويكون حسب التعريف:

$$rank\, f = dim\ Im\, f$$

مثال (4.1.4):

ليكن التطبيق الخطي $f : \Re^2 \to \Re^2$ والمعروف بالشكل:

$$\forall\ (a.b) \in \Re^2 \quad : \quad f\,(a.b) = (a + b.a)$$

إن صور المولدات التالية لـــ $\Re^2$ تولد $Im\, f$:

$$f\,(1.0) = (1.1)$$
$$f\,(0.1) = (1.0)$$

إذن فجمـــلة المتجهين (0.1). (1.1) تولد $Im\, f$. وبما أنها مستقلة خطياً فهي تشكل قاعدة لـــ $Im\, f$. وبالتالي يكون:

$$rank\, f = dim\ Im\, f = 2$$

تعريف (4.1.5):

يسمى التطبيق الخطي $f\!: U \to V$ تطبيقاً شاذاً (*singular mapping*) إذا وجد في U مـــتجه مـــا $0 \neq u$ بحيـــث يكون: $f\,(u) = 0_V$، إذن التطبيق $f\!: U \to V$ يكون غير شاذ (*Nonsingular mapping*) إذا كان لا يوجـــد في الفضاء المتجهي U متجهاً $0 \neq u$ ويحقق العلاقـــة $f(u)=0_V$ وهـــذا يكـــافئ القول بأن التطبيق f يكون غير شاذ إذا كانت نواة f لا تحوي سوى المتجه الصفري أي أن $ker\, f = \{0_V\}$.

مبرهنة (4.1.5):

ليكـــن $f\!: U \to V$ تطـــبيقاً خطيـــاً من الفضاء المتجهي إلى الفضاء المتجهي V إن الشـــرط اللازم والكافئ حتى يكون f تطبيقاً غير شاذ هو أن يكون f متبايناً (تطبيقاً متبايناً *In jection*)

البرهان:

لزوم الشرط: إذا كان التطبيق f غير شاذ وكان $u_1, u_2 \in U$ بحيث أن

$f(u_1) = f(u_2)$ فإن: $f(u_1) - f(u_2) = 0_V$ أي أن: $f(u_1 - u_2) = 0_V$

وهذا يعني أن $u_1 - u_2 \in \ker f$

وبما أن f غير شاذ، فإن $\ker f = \{0_V\}$ وبالتالي فإن:

$$u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$$

أي أن التطبيق f متباين

كفاية الشرط: لنفرض أن التطبيق f متباين. إذا كان u متجهاً اختيارياً من $\ker f$ حيث أن $f(u) = 0_V$

وكما نعلم فإن $f(0_U) = 0_V$ وبالتالي يكون $f(u) = F(0_U)$

وبما أن f متباين فإن $u = 0_U$ أي أن $\ker f = \{0_U\}$ وهو المطلوب لما كان من الممكن أن تركب التطبيقات الخطية إلى بعضها البعض بطرق مختلفة والحصول على تطبيقات خطية جديدة، ولما لهذه العمليات من أهمية بالغة فإننا فيما يلي سنقوم بدراسة العمليات على التطبيقات الخطية بالتفصيل.

1 جمع تطبيقين خطيين (*Addition of two linear mapping*):

ليكن V, U فضاءين متجهين فوق الحقل K، $g: U \to V$، $f: U \to V$ تطبيقين خطيين يسمى التطبيق $(f+g): U \to V$ والمعرف بالشكل:

$$(f+g)(u) = f(u) + g(u) \; ; \; \forall u \in U$$

مجموع التطبيقين f و g

إن مجموع التطبيقين الخطيين f و g هو تطبيق خطي، لأنه مهما يكن المتجهان u_1, u_2 من U والمقداران العدديان a_1, a_2 من K فإن:

$$
\begin{aligned}
(f+g)=(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2) &= f(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2)+g(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2)\\
&=\alpha_1 f(u_1)+\alpha_2 f(u_2)+\alpha_1 g(u_1)+\alpha_2 g(u_2)\\
&=\alpha_1 (f(u_1)+g(u_1))+\alpha_2 (f(u_2)+g(u_2)\\
&=\alpha_1 (f+g)(u_1)+(f+g)(u_2)
\end{aligned}
$$

2. طرح تطبيقين خطيين:

ليكن لدينا الفضاءان المتجهان V, U فوق الحقل k، والتطبيقين الخطيين:

$f: U \to V \quad ; \quad g: U \to V$

نسمى التطبيق $V\ ;\ U\ :(f\text{-}g \leftarrow)$ والمعرف بالشكل التالي:

$$(f-g)(u)=f(u)\_g(u)\ ;\ \forall u \in U$$

حاصل طرح التطبيقين الخطيين g, f.

إن $(f\text{-}g)$ هو تطبيق خطي وذلك لأنه مهما يكن المتجهان. u_1, u_2 من U والمقداران العدديان α_1, α_2 من k فإن:

$$
\begin{aligned}
(f-g)(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2) &= f(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2)-g(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2)\\
&=\alpha_1 f(u_1)+\alpha_2 f(u_2)-\alpha_1 g(u_1)-\alpha_2 g(u_2)\\
&=\alpha_1 (f(u_1)-g(u_1))+\alpha_2 (f(u_2)-g(u_2))\\
&=\alpha_1 (f-g)(u_1)+\alpha_2 (f-g)(u_2)
\end{aligned}
$$

3. ضرب تطبيق خطي بمقدار عددي:

بفــرض أن $f: U \to V$ تطــبيق من الفضاء المتجهي U إلى الفضاء V حيث V, U معرفتان فوق نفس الحقل k وليكن α مقدار عددي من k. إن التطبيق:

$$\alpha f : U \to V$$

والمعرف بالشكل:

$$(\alpha f)(u)=\alpha f(u). \forall u \in V$$

هــو تطــبيق خطي ويدعى حاصل ضرب التطبيق الخطي f بالمقدار العددي α، بفرض u_2, u_1 متجهان اختياريان من U، α_2, α_1 مقدارين عددين من k عندئذ:

$$(\alpha f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha(\alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2))$$
$$= (\alpha\alpha_1) f(u_1) + (\alpha\,\alpha_2) f(u_2)$$
$$= (\alpha_1\alpha) f(u_1) + (\alpha_2\alpha) f(u_2) = \alpha_1(\alpha f(u_1)) + \alpha_2(\alpha f(u_2))$$
$$= \alpha_1(\alpha\, f)(u_1) + \alpha_2(\alpha\, f)(u_2)$$

نلاحـظ أنه من أجل $\alpha = -1$ فإن التطبيق $(-1)f$ يدعى نظير التطبيق f ويرمز له بالرمز $-f$ وتحقق العلاقة:

$$(f + (-f))(u) = f(u) + (-f)(u) = f(u) - f(u) = 0_V = 0(u)$$

وذلك مهما يكن $u \in U$

مبرهنة (4.1.6):

ليكن U, V فضائين متجهين فوق الحقل k، عندئذ إن مجموع كل التطبيقات الخطية مـن U إلى V تشـكل فضاء متجهياً فوق الحقل k وذلك بالنسبة لعمليتي جمع التطبيقات الخطية وضرب تطبيق خطي بمقدار عددي، ويرمز لهذا الفضاء بالرمز Hom (U. V).

البرهان:

يترك للقارئ لسهولته مع الإشارة إلى أن 0 في الفضاء الشعاعي Hom (U. V) هو التطبيق الصفري: $0: U \rightarrow V$ والمعرف بالشكل:

$$0(u) = 0_V \quad , \quad \forall u \in U$$

مبرهنة (4.1.7):

ليكن V. U فضائين متجهين فوق نفس الحقل k عندئذ:

التطبيق الخطي: $f: U \rightarrow V$

يكون f ايزومورفيزوم (تماثل *Isomorphism*) إذا وفقط إذا كان f غير شاذ.

البرهان:

لـنفرض أن f تقـابل (*isomorphisim*)، وأن f لا يطـابق التطبيق الصفري وأن

$0_V \in U$ يــؤدي هــذا إلى أن $0_V \in V$ ، $f(0_u) = 0_V$ فقط وبالتالي f غير شاذ. إن العكس صحيح لأنه إذا فرضنا أن f غير شاذ.

ولنفرض أن: $f(u_1) = f(u_2)$ حيث u_2, u_1 من U عندئذ:

$$f(u_1 - u_2) = f(u_1) - f(u_2) = 0$$

وبالتالي $u_1 = u_2$ أي أن f تقابل والتطبيق f ايزومورفيزوم.

مثال (4.1.5):

ليكن التطبيق الخطي $f: U \to V$ والمعرف كما يلي:

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$$

حيث $V = U = \Re^3$ والمطلوب:

أ) أوجد بعد وأساس $f(U)$

ب) أوجد بعد وأساس $\ker f$

الحل:

أ) إذا فرضنا أن مولدات U هي: $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$

فإنه يكون:

$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 0, 1)$$
$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (2, 1, 1)$$
$$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (-1, 1, -2)$$

لكي تكون هذه المتجهات أساساً في $f(U)$ يجب أن تكون مستقلة خطياً أي:

$$\alpha(1, 0, 1) + \beta(2, 1, 1) + \gamma(-1, 1, -2) = (0, 0, 0)$$

ومنه:

$$\alpha + 2\beta - \gamma = 0$$
$$\beta + \gamma = 0$$
$$\alpha + \beta - 2\gamma = 0$$

وبطرح المعادلة 3 من 1 نجد مجموعة المعادلات:

$$\alpha + 2\beta - \gamma = 0$$
$$\beta + \gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = -\gamma$$

والتي تعني أن المتجهات مرتبطة خطياً ويصبح الأساس هو:

$(1, 1, 0)$ ، $(1-, 2, 1)$ وبعده يساوي 2

ج) البحث عن (x, y, z) بحيث يكون:

$$f(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

من تعريف التطبيق f نجد:

$$x + 2y - z = 0$$
$$y + z = 0$$
$$x + y - 2z = 0$$

إن مجموعة المعادلات أعلاه تصبح:

$$x + 2y - z = 0$$
$$y + z = 0$$

فإذا أخذنا $z = 1$ فإنه يكن $y = -1$ ، $x = 3$ ومنه أبعاد $\ker f$ يساوي الواحد وأساسه $(3, -1, 1)$

4. تركيب تطبيقين خطيين (Composition of two linear mapping):

ليكـن لديـنا الفضـاءات المـتجهية W, V, U والمعرفة فوق الحقل k، والتطبيقان الخطيان

$$g : U \to w \qquad ، \qquad f : U \to V$$

يسمى التطبيق: $g \circ f : U \to W$ والمعرف بالشكل:

$$(g \circ f)(u) = g(f(u)), \forall u \in U$$

تركيب التطبيقين f, g

إن التطـــبيق g o f هو تطبيق خطي وذلك لأنه من أجل أي متجهين u_2, u_1 من U وأي مقدارين عدديين α_2, α_1 من k يكون:

$$\begin{aligned}(g\,o\,f)(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) &= g\,(f\,(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)\\ &= g\,(\alpha_1 f\,(u_1) + \alpha_2 f\,(u_2)\\ &= \alpha_1 g\,(f\,(u_1)) + \alpha_2 g\,(f\,(u_2))\\ &= \alpha_1 (g\,o\,f)(u_1) + \alpha_2 (g\,o\,f)(u_2)\end{aligned}$$

مثال (4.1.6):

ليكن التطبيقان الخطيان $g:\mathfrak{R}^2 \to \mathfrak{R}^2$, $f:\mathfrak{R}^3 \to \mathfrak{R}^3$ والمعرفان كما يلي:

$$g(x.y) = (y.x) \quad , \quad f(x,y,z) = (2x, y+3)$$

والمطلوب: احسب $g\,o\,f$

الحل:

إن: $(g\,o\,f):\mathfrak{R}^3 \to \mathfrak{R}^2$

$$(g\,o\,f)(x,y,z) = g(2x, y+z) = (y+z, 2x)$$

من الملاحظ أن $f\,o\,g$ لا يمكن حسابها لماذا؟

5. معكوس تطبيق خطي (Invers of linear mopping):

بفرض أن V, U فضاءان متجهان فوق الحقل k، وليكن

$f: V \to U$

تطبيقاً خطياً متبايناً وغامراً (تقابل) عندئذ التطبيق المعاكس:

$: U \to V^{-1} f$

تطبيقاً خطياً، ونسمي معكوس التطبيق الخطي f.

بفــرض أن u_1, u_2 متجهان اختياريان من الفضاء المتجهي U. وربما أن f تطبيق تقابل، فإنه يوجد متجهان v_1, v_2 من الفضاء المتجهي V بحيث يكون:

$f(u_1) = V_1 \quad , \quad f(u_2) = V_2$ ومنه:

$$f^{-1}(v_1+v_2)=f^{-1}(f(u_1)+f(u_2))=f^{-1}(f(u_1+u_2))$$
$$=u_1+u_2=f^{-1}(v_1)+f^{-1}(v_2)$$

ونجد كذلك من اجل اي عدد α من الحقل k أن:

$$f^{-1}(\alpha v_1)=f^{-1}(\alpha f(u_1))=f^{-1}(f(\alpha u_1))$$
$$=\alpha u_1=\alpha f^{-1}(v_1)$$

ومنه نستنتج أن f^{-1} تطبيق خطي

مثال (4.1.7):

ليكن التطبيق الخطي $f:\Re^3\to\Re^2$ والمعرف بالشكل:

$$f(x,y,z)=(2x,4y-y,2x+3y-z)$$

والمطلوب:

أ) برهن أن f تقابل أي $\ker f=\{0\}$

ب) احسب f^{-1}

الحل:

أ) استناداً إلى تعريف النواة للتطبيق الخطي وهي:

$$\ker f=\{(x,y,z)\in\Re^3 \quad : \quad f(x,y,z)=0\Re^3$$

نجد أن:

$$(2x,4x-y,2x+3y-z)=(0,0,0)$$

ومنه نحصل على:

$x=0,\ \ y=0,\ \ z=0$ أي أن $\ker f=\{0\}$

ب) بما أن f تقابل فإنه يوجد متجه $v,\Re^3$ بحيث يكون:

$f(u)=v\Rightarrow(2x,4x-y,2x+3y-z)=(r.s.t)$ حيث $u=(v,y,z)$

حيث $(r.s.t)=v$ ومنه نحصل على:

$z = 7r - 35 - t$ أي أن: وكذلك $y = 2r - 5$ ، $2x = r \Rightarrow x = \frac{r}{2}$

$$f^{-1}(r.s.t) = (\frac{1}{2}r, 2r-5, 7r-35-t)$$

$$f^{-1}(r.s.t) = (\frac{1}{2}r, 2r-5, 7r-35-t)$$

6. مصفوفة تطبيق خطي (matrix of alinear mapping):

ليكـــن U .V فضـــائين مـــتجهين فـــوق الحقل k وليكن: $B_1 = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$، $B_2 = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ قـــاعدتي الفضـــائين U .V على الترتيب. إن السؤال الذي سنجيب عـــليه الآن هو: ما هي العلاقة التي تسمح لنا بتعيين صورة متجه ما $u \in U$ وفق تطبيق خطي f من V إلى U . أي العلاقة التي تمكننا من معرفة مركبات المتجه *f(u)* على قاعدة الفضاء المتجهي V؟

بفرض أن $f: U \to f$ تطبيق من U إلى V عندئذ $f(u_1), f(u_2), ..., f(u_n)$ حيث $u_1, u_2, ..., u_n$ قـــاعدة للفضـــاء U، ستكون متجهات من الفضـــاء V، وبالتالي إن كلاً منها يكتب على شكل تركيب خطي لمتجهات القاعدة $B_2 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ أي

$$\begin{aligned}
f(u_1) &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ... + a_{m1}v_m \\
f(u_2) &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + ... + a_{m2}v_m \\
&\vdots \\
f(u_n) &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_n + ... + a_{mn}v_n
\end{aligned} \qquad (4.1.1)$$

إن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (*)$$

والتي عمودها ذو الرقم i (مثلاً) هو عبارة عن مركبات المتجه $f(u_i)$ على القاعدة B_2 حيـــث (i=1, 2, ..., n) تســـمى مصـــفوفة التطـــبيق الخطـــي f بالنســـبة للقاعدتين $B_1 = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$، $B_2 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ نرمز لهذه المصفوفة بالرمز $[f]_{B1.B2}$.

إذا كان عدد أبعاد الفضاء U مساوياً أبعاد الفضاء V وكانت القاعدة B_1 للفضاء U (الأول) هـــي ذاتها بالنسبة للفضاء V أي $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ فإننا نرمز لمصفوفة التطبيق f بالرمز $[f]_\beta$

يمكـــن أن نلاحظ أن المصفوفة (*) هي منقول مصفوفة المعاملات في العلاقات (4.1.1) ليكـــن u متجهاً اختيارياً من الفضاء المتجهي U ولنفرض أن $a_1, a_2, ..., a_n$ هي مركـــبات المـــتجه u بالنســـبة للقاعدة β_1، وأن $b_1, b_2, ..., b_m$ هي مركبات f (u) بالنسبة للقاعدة β_2 أي:

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + ... + a_n u_n \tag{4.1.2}$$

$$f(u) = b_1 v_1 + b_2 v_2 + ... + a_n v_n \tag{4.1.3}$$

من العلاقتين (4.1.2)، (4.1.1) نجد أن:

$$\begin{aligned} f(u) &= f(a_1 u_1 + a_2 u_2 + ... + a_n u_n) = a_1 f(u_1) + a_2 f(u_2) + ... + a_n f(u_n) \\ &= a_1(a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + ... + a_{m1} v_m)\, a_2(a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + ... + a_{m2} v_m) \\ &+ ... + a_n(a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + ... + a_{mn} v_m) v_m \\ &= (a_1 a_{11} + a_2 a_{12} + ... + a_n a_{1n}) v_1 + (a_1 a_{21} + a_2 a_{22} + ... + a_n a_{2n}) v_2 \\ &+ ... + (a_1 a_{m1} + a_2 a_{m2} + ... + a_n a_{mn}) v_m \end{aligned}$$

بمقارنة هذه العلاقة مع العلاقة (4.1.3) نجد أن:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 a_{11} + a_2 a_{12} + ... + a_n a_{1n} \\ b_2 &= a_1 a_{21} + a_2 a_{22} + ... + a_n a_{2n} \\ &\vdots .... \\ b_m &= a_1 a_{m1} + a_2 a_{m2} + ... + a_n a_m \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

يمكن كتابة العلاقات (4.1.4) بالشكل:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \tag{4.1.5}$$

إذا رمزنا لمصفوفة العمود المشكلة من مركبات المتجه f (u) على قاعدة V بالرمز B ولمصفوفة العمود المشكلة من مركبات المتجه u على قاعدة U بالرمز α فإن العلاقة (4.1.5) تكتب على الشكل المختصر $\beta = A \cdot \alpha$

وهكــذا فقــد أصبح واضحاً كيف أن مصفوفة التطبيق الخطي تمكننا وبسهولة من معرفة مركبات صورة المتجه $v \in U$ (أي f (u)) على قاعدة معلومة لــ V.

مثال (4.1.7):

إن التطبيق $o : U \to V$ والمعرف بالشكل: o = o u مهما تكن u من U الذي سميناه التطــبيق الصــفري، وهــو تطــبيق خطــي ومصــفوفته بالنســبة لــلقاعدة الاختيارية $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ هي المصفوفة المربعة الصفرية.

مثال (4.1.8):

ليكن $\Re^2 \to \Re^2$ تطبيق خطي معرف بالشكل:

$$f(x, y) = (2y, 3x - y)$$

أوجد التمثيل المصفوفي لــ f بالنسبة للقاعدة $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$

الحل:

من الملاحظ أولاً أنه إذا كان $(a.b) \in \Re^2$ فإن:

$$(a.b) = a\, e_1 + b\, e_2$$

وبالتالي فإن:

$$f(e_1) = f(1,0) = (0,3) = 0e_1 + 3e_2$$
$$f(e_2) = f(0,1) = (2,-1) = 2e_1 - e_2$$

وبالتالي فإن مصفوفة f والتي نرمز لها بــ $[f]_e$ هي:

$$[f]_e = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

من الملاحظ أن المصفوفة (*) هي منقول مصفوفة المعاملات لــ e_1 . e_2 .

مثال (4.1.9):

أوجد التمثيل المصفوفي لكل من التطبيقين الخطيين f_1 ، f_2 التاليين على $\Re^3$ بالنسبة للقاعدة القانونية* (أو النظامية)

$$(I)\quad f_1(x, y, z) = (2x - 3y + 4z \,,\, 5x - y + 2z \,,\, 3x)$$
$$(ii)\quad f_2(x, y, z) = (2y + z \,,\, x - 4y \,,\, 3x)$$

الحل:

نعلم أن القاعدة القانونية في $\Re^3$ هي مجموعة المتجهات:

$$\{e_1 = (1, 0, 0) \,,\, e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$$

ومنه نجد:

$$f_1(e_1) = f_1(1,0,0) = (2,5,-4) = 2e_1 + 5e_2 + 4_{e_3}$$
$$f_1(e_2) = f_1(0,1,0) = (-3,-1,7) = -3e_1 - e_2 + 7e_3$$
$$f_1(e_3) = f_1(0,0,1) = (4,2,0) = 4e_1 + 2e_2 + 0e_3$$
$$f_2(e_1) = f_2(1,0,0) = (0,1,3) = 0e_1 + e_2 + 3e_3$$
$$f_2(e_2) = f_2(0,1,0) = (2,-4,0) = 2e_1 - 4e_2 + 0e_3$$
$$f_2(e_3) = f_2(0,0,1) = (1,0,0) = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

ومنه نجد أن مصفوفة التطبيق الأول والتي نرمز لها بـ $[f_1]_e$، ومصفوفة التطبيق الثاني والتي نرمز لها بـ $[f_2]_e$ هي:

$$(i)\,[f_1]_e = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix} \qquad (ii)\,[f_2]_e = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نتائج:

- بفرض أن قاعدة للفضاء المتجهي U، $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ قاعدة للفضاء المتجهي V

---

* القاعدة القانونية للفضاء $\Re^n$ (Standar basis for $\Re^n$) هي مجموعة المتجهات التالية

$$e_1 = (1,0,\dots,0), e_2(0,1,0,\dots 0),\dots,(e_n = (0,0,\dots,n)$$

(الفضاءان U ،V معرفان فوق نفس الحقل k). وليكن g, f تطبيقين خطيين من U إلى V.
ولنفرض أن $A=[a_{ij}]$ مصفوفة التطبيق f بالنسبة للقاعدتين المذكورتين وأن $B=[b_{ij}]$ مصفوفة التطبيق g بالنسبة لنفس القاعدتين عندئذ:

1. تكون المصفوفتان B, A متساويتين إذا كان التطبيقان g, f متساويين.

البرهان:

نعلم أن $f=g$ يعني أن $f(u)=g(u)$ مهما يكن u من U وبصورة خاصة من أجل متجهات القاعدة $B_1=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$

يكون: $f(u_j)=g(u_j)$ حيث $j=1, 2,\dots, n$

ولما كان:

$$f(u_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}v_i \quad , \quad g(u_j)=\sum_{i=1}^{m} b_{ij}v_i$$

فإننا نجد أن:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}v_i=\sum_{i=1}^{m} b_{ij}v_i$$

أي أن: $a_{ij}=b_{ij}$ حيث $i=1, 2, \dots, m$ ، $j=1, 2, \dots, n$

2. إن مصفوفة التطبيق الخطي $(f+g):U\to V$ تساوي مجموع مصفوفتي التطبيقين g, f.

البرهان:

بفرض أن $C=[C_{ij}]$ هي مصفوفة التطبيق الخطي $(f+g)$ بالنسبة للقاعدتين B_1, B_2 أي أن:

$$(f+g)(u_j)=\sum_{i=1}^{m} C_{ij}v_i \tag{4.1.6}$$

ولما كان مجموع التطبيقين الخطيين $f+g$ تعطي العلاقة:

$(f+g)(u)=f(u)+g(u)\,;\forall u\in U$

فمن أجل متجهات القاعدة $B_1=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ نجد:

$$(f+g)(u_j)=f(u_j)+g(u_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{i\,j}v_i+\sum_{i=1}^{m}b_{i\,j}v_i \tag{4.1.7}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}(a_{i\,j}+b_{i\,j})v_i$$

بمقارنة (3.1.7) مع (3.1.6) نجد أن:

$C_{ij}=a_{i\,j}+b_{i\,j}$ حيث i = 1, 2, …, m ، j= 1, 2, …,n

3. إن مصفوفة التطبيق الخطي $f-g$ تساوي A-B

إن برهان هذه النتيجة يتم بنفس طريقة برهان النتيجة (2).

4. بفـرض أن α مقـدار عـددي من الحقل k. إن مصفوفة التطبيق الخطي $\alpha.f$ من الفضـاء المتجهي U إلى V بالنسبة للقاعدتين β_1,β_2 تساوي $\alpha.A$ بمعنى أن حاصل ضرب مصفوفة التطبيق الخطي f بالمقدار العددي α.

البرهان:

نفرض أن $D=\left[d_{i\,j}\right]$ هي مصفوفة التطبيق الخطي:

$$\alpha.f:U\to V$$

بالنسبة للقاعدتين B_1,B_2 عندئذ يكون:

$$(\alpha\, f)(u_i)=\sum_{i=1}^{m}d_{i\,j}v_i \tag{4.1.8}$$

ولما كان التطبيق $d\ f$ خطي فإن:

$$(\alpha\, f)(u_i)=\alpha(f(u_i)=\alpha\sum_{i=1}^{m}\alpha_{i\,j}v_i \tag{4.1.9}$$

وبمقارنة (4.1.8) مع (4.1.9) نجد أن $d_{i\,j}=\alpha_{i\,j}$ ومنه:

$$\left[d_{ij}\right]=\left[\alpha\, a_{ij}\right]=\alpha\left[a_{ij}\right]$$

5. لتكن U, V, W ثلاث فضاءات متجهية فوق نفس الحقل k وبفرض أن:

$B_1=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ قاعدة للفضاء المتجهي U.

$B_2=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$ قاعدة للفضاء المتجهي V.

$B_2=\{W_1,W_2,\dots,W_n\}$ قاعدة للفضاء المتجهي W

وليكن f تطبيقاً خطياً من U إلى V مصفوفته الموافقة هي $A=\left[a_{ij}\right]$ بالنسبة للقاعدتين B_1,B_2 وليكن g تطبيقاً خطياً من V إلى W مصفوفته الموافقة $B=\left[b_{ij}\right]$ بالنسبة للقاعدتين B_2,B_3، عندئذ يكون $g\ o\ f$ تطبيق خطي من U إلى W مصفوفته $C=\left[C_{ij}\right]$

حيث:

$$\left[C_{ij}\right]=\left[b_{ij}\right]\left[a_{ij}\right]$$

البرهان:

بما أن $g\ o\ f$ تطبيق خطي من U إلى W فإنه توجد مصفوفة $C=\left[C_{ij}\right]$ موافقة للتطبيق الخطي $g\ o\ f$ أي:

$$(g\ o\ f)(u_i)=\sum_{d=1}^{k}C_i d\ wd \quad ; \quad i=1,2,\dots,n$$

ولدينا من جهة ثانية:

$$(g\ o\ f)(u_i)=g(f(u_c))=g(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}v_i)=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}g(v_i)$$

$$=\sum_{d=1}^{k}(\sum_{j=1}^{m}b_{id}a_{ij})wd \quad ; \quad i=1,2,\dots,n$$

ومنه نجد أن:

$$C_{id}=\sum_{j=1}^{m}b_{id}a_{ij}$$

من أجل $1 \le i \le n$, $1 \le d \le k$ ومنه نجد المطلوب.

من النتيجة (5) يمكن ملاحظة أنه إذا كان

$$g : V \to W \quad , \quad f : U \to V$$

تطبيقان خطيان وكانت $B_1 = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ قاعدة للفضاء المتجهي U، $B_2 = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ قاعدة للفضاء المتجهي V، $B_3 = \{W_1, W_2, ..., W_k\}$ قاعدة للفضاء المتجهي w فإن التطبيق $g \circ f : U \to W$ هو تطبيق خطي مصفوفته C مثلاً بالنسبة للقاعدتين B_2, B_1 هي:

(i)
$$C = B.A$$

والتي نكتبها بالشكل:

(ii)
$$[g \circ f]_{B1B3} = [g]_{B2B3}[f]_{B1B3}$$

هذا ويمكن تعميم العلاقة (ii) على أكثر من تطبيق خطي بمعنى أنه إذا كان لدينا مجموعة تطبيقات خطية لمجموعة فضاءات متجهية حيث $B_1, B_2, ..., B_n$ قواعد هذه الفضاءات $U_1, U_2, ..., U_n$ على الترتيب

$$U_1 \xrightarrow{f_1} U_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} U_n$$

فإن:

$$[f_{n-1} o f_{n-2} o ... o f_2 o f_1] = [f_{n-1}]_{B_{n-1}, B_n} [f_{n-2}]_{B_{n-2}, B_{n-1}} \cdots [f_2]_{B_2, B_3} \cdot [f_1]_{B_1, B_2}$$ s

مثال (4.1.10):

ليكن التطبيقان الخطيان $f : \Re^3 \to \Re^2$ والمعرف بالشكل:

$$f(x.y.z) = (2x - 4y + 9z, 5x + 3y - 2z)$$

$g : \Re^2 \to \Re^4$ معرف بالشكل:

$$g(x.y) = (3x + 4y, 5x - 2y, x + 7y, 4x)$$

المطلوب: أوجد مصفوفة كل منهما بالنسبة للقاعدة القانونية في الفضاءات السابقة ثم تحقق

من أن:

$$[gof]_e = [g]_e [f]_e$$

الحل:

نوجد مصفوفة التطبيق f بالنسبة للقاعدة القانونية في $\Re^3$ من $\Re^2$:

$$f(e_1) = f(1,0,0) = (2,5) = 2e_1' + 5e_2'$$

حيث: $e_2' = (0,1)$ ، $e_1' = (1,0)$ قاعدة لـــ $\Re^2$

$$f(e_2) = f(0,1,0) = (-4,3) = -4e_1' + 3e_2'$$
$$f(e_3) = f(0,0,1) = (9,-2) = 9e_1' - 2e_2'$$

ومصفوفة f هي:

$$[f]_{e,e'} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix} = A$$

كذلك نوجد مصفوفة g بالنسبة للقاعدة $e_2' = (0,1)$ ، $e_1' = (1,0)$ لـــ $\Re^2$ والقاعدة

$$e''_1 = (1,0,0,0), e''_2 = (0,1,0,0), e''_3 = (0,0,1,0), e''_4 = (0,0,0,1)$$
$$g(e_1') = g(1,0) = (3,5,1,4) = 3e''_1 + 5e''_2 + e''_3 + 4e''_4$$
$$g(e_2') = g(0,1) = (4,-2,7,0) = 4e''_1 - 2e''_2 + 7e''_3 + 0e''_4$$

ومصفوفة التطبيق الخطي g هي:

$$\{g\}_{e',e''} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \\ 1 & 7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = B$$

إن التطبيق الخطي $g o f$ هو: $gof : \Re^3 \to \Re^4$

إن:

$$(gof)(x,y,z)=(g(f(x,y,z))=$$
$$=g(2x-4y+9z,5x+3y-2z)$$
$$(gof)(x.y.z)=(26x+19z,-26y+49z,37x+17y,8x-16y+36z)$$

ومصفوفة هذا التطبيق هي:

$$\{gof\}_{c,c'}=\begin{bmatrix}26 & 0 & 19\\ 0 & -26 & 49\\ 37 & 17 & -5\\ 8 & -16 & -36\end{bmatrix}$$

كما نلاحظ أن:

$$C=B.A$$
$$\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & -2\\ 1 & 7\\ 4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -4 & 9\\ 5 & 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}26 & 0 & 19\\ 0 & -26 & 49\\ 37 & 17 & -5\\ 8 & -16 & -36\end{bmatrix}$$

6. بفرض أن U فضاء متجهي فوق الحقل k. ولتكن $B=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ قاعدة لـ U وليكن f تطبيقاً من U إلى V: $f:U\to V$ خطياً تقابلاً (متباين وغامر) (bijection)، $A=\{a_{ij}\}_{mxn}$ هي مصفوفة التطبيق f عندئذ تكون مصفوفة التطبيق الخطي

$f^{-1}:U\to V$ بالنسبة للقاعدة B هي:

$$A^{-1}=([a_{ij}])^{-1}$$

إن برهان هذه النتيجة نتركه كتمرين للقارئ.

مثال (4.1.10):

ليكن f تطبيقاً خطياً على $\Re^3$ معرف بالشكل: $f(x,y,z)=(2y+z,x-4y,3x)$

(i) أوجد مصفوفة f بدلالة القاعدة $\{B_1=(1,1,1),B_2=(1,1,0),B_3=(1,0,0)\}$

(ii) تحقق من أنه أياً كان المتجه u من $\Re^3$ فإن:

$$[f]_{B'}[u]_B = [f(u)]_B$$

الحل:

علينـــا أولاً إيجـــاد إحداثيـــات مـــتجه اخـــتياري $(a,b,c)\in\Re^3$ بالنسبة للقاعدة $\{B_1, B_2, B_3\}$ لنكـــتب (a, b, c) كـــتركيب خطـــي لمتجهات هذه القاعدة وذلك باستخدام الأعداد المجهولة x, y, z:

$$(a,b,c) = xB_1 + yB_2 + zB_3 = X(1,1,1) + Y(1,1,0) + Z(1,0,0)$$

ومنه نجد أن:

$$x = c \quad , \quad x + y = b \quad , \quad x + y + z = a$$

والتي نحصل منها على: $z = a - b$ ، $y = b - c$ ، $x = c$

وهكذا فإن:

$$(a,b,c) = cB_1 + (b-c)B_2 + (a-b)B_3$$

(i) بما أن: $f(x.y.z) = (2y + z.x - 4y.3x)$ فإن

$$f(B_1) = f(1.1.1) = (3.-3.3) = 3B_1 - 6B_2 + 6B_3$$
$$f(B_2) = f(1.1.0) = (2.-3.3) = 3B_1 - 6B_2 + 5B_3$$
$$f(B_3) = f(1.0.0) = (0.1.3) = 3B_1 - 2B_2 - B_3$$

وتكون مصفوفة التطبيق الخطي f هي:

$$[f]_B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

(ii) لنفرض أن $u = (a.b.c)$ فيكون عندئذ:

$$u = (a.b.c) = cB_1 + (b-c)B_2 + (a-b)B_3$$

وبالتالي فإن مصفوفة المتجه u هي:

$$[u]_B = \begin{bmatrix} c \\ b-c \\ a-b \end{bmatrix}$$

لنحسب الآن $f(u)$:

$$f(u) = f(a,b,c) = (2b+c, a-4b, 3a) = 3aB_1 + (-2a-4b)B_2 + (-a+6b+c)B_3$$

ومنه نجد:

$$[f_{(u)}]_B = \begin{bmatrix} 3a \\ -2-4b \\ -a+6b+c \end{bmatrix}$$

وكما نلاحظ فإن:

$$[f]_B [u]_{B'} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ b-c \\ a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a \\ -2a-4b \\ -a+6b+c \end{bmatrix} = [f(u)]_B$$

سندرس فيما يلي تأثير تغيير قاعدة النطاق والمدى على مصفوفة تطبيق خطي.

ليكن U.V فضائين متجهين فوق الحقل k. وليكن $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ قاعدة لـ U $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ قاعدة لـ V وليكن $f: U \to V$ تطبيقاً خطياً مصفوفته بالنسبة للقاعدتين المذكورتين أعلاه هي A، فإذا بدلنا إحدى هاتين القاعدتين أو كليهما فإننا نحصل على مصفوفة جديدة B مختلفة عن المصفوفة A والسؤال الذي سنحاول الإجابة عنه الآن هو:

ما هي العلاقة بين المصفوفتين B,A؟ إن الجواب على ذلك يأتي من خلال المبرهنة.

مبرهنة (4.1.8):

نفرض U.V فضاءان متجهان فوق نفس الحقل k وليكن $B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$، $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ قاعدتين لـ U .V على الترتيب. وليكن f تطبيقاً خطياً من U إلى

V مصـــــفوفته بالنســـبة لـــلقاعدتين المذكورتيـــــن $A=[a_{ij}]$، ولـــنفرض أن $B'_1=\{u'_1,u'_2,\dots,u'_n\}$، $B'_2=\{v'_1,v'_2,\dots,v'_n\}$ قاعدتـــان جديدتـــان لـــ U، V على الـــترتيب ولـــتكن $B=[b_{ij}]$ مصفوفة التطبيق الخطي f بالنسبة للقاعدتين الجديدتين، عندئذ توجد مصفوفة مربعة، من المرتبة n ومصفوفة مربعة D من المرتبة m بحيث يكون:

$$B=D^{-1}\ .\ A=C$$

البرهان:

ليكن $g:U\to V$ تطبيقاً خطياً معرفاً بالشكل:

$$g(u_i)=u'_i\quad ;\quad i=1,2,\dots,n$$

ولتكن $C=[C_{ij}]$ مصفوفة g بالنسبة للقاعدة $B_1=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$

ليكن الآن:

$h:V\to V$ تطبيقاً خطياً معرفاً بـــ

$$h(v_i)=v'_j\quad ,\quad J=1,2,\dots,m$$

ولـــتكن $D=[v_{ij}]$ مصـــفوفة h بالنســـبة للقاعدة $B_2=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$ نجد من تعريف h أنه تطبيق خطي تقابل إذن فإن h^{-1} هو أيضاً تطبيق خطي تقابل مصفوفته

$$D^{-1}=([d_{ij}])^{-1}$$

لنضع: $F=h^{-1}o\ f\ o\ g$

حيـــث g هو التطبيق الخطي المقابل للمصفوفة h^{-1},C هو التطبيق الخطي المقابل للمصفوفة D^{-1}

فنجد أن:

$$f(u_i)=(h^{-1}o\ fog)=(h^{-1}of)(u'_i)=h^{-1}(\sum_{j=1}^{m}b_{ij}v'_j)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}b_{ij}h^{-1}(v'_j)=\sum_{j=1}^{m}b_{ij}v_j\quad ,\quad i=1,2,\dots,n$$

نستنتج من هذا أن $[b_{ij}]$ هي مصفوفة التطبيق الخطي f بالنسبة للقاعدتين B_1, B_2

هذا من جهة ومن جهة أخرى نجد من تعريف f أن:

$$[b_{ij}] = [D_{ij}]^{-1} [a_{ij}] [C_{ij}]$$

أي أن

$$B = D^{-1} - A.C$$

وهو المطلوب.

ثانياً/ المؤثرات الخطية (Linear operators):

تعريف (4.2.1):

المؤثر الخطي هو عبارة عن تطبيق خطي من الشكل

$T : U \to U$ حيث U هو فضاء شعاعي فوق الحقل k.

وكما هو الحال من أجل تطبيق خطي فإن المؤثر الخطي يحقق الشرطين التاليين

1. مهما يكن x_2, x_1 من U فإن: $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$

2. مهما يكن x من α, U من k فإن: $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

إن دراسة المؤثرات الخطية لا تختلف كثيراً عن دراسة التطبيقات الخطية وبالتالي نانه يمكننا تعريف العمليات على المؤثرات الخطية على الشكل التالي:

1. الجمع:

إن مجمـــوع المؤثـــرين الخطيين T_2, T_1 المعرفين على الفضاء U هو مؤثر خطي على الفضاءU يرمز له بالرمز $T_1 + T_2$ ويعرف بالشكل

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$$

مهما يكن x من الفضاء المتجهي U.

2. الضرب بعدد:

إن حاصـــل ضـــرب مؤثر خطي T على الفضاء المتجهي U بالعدد α هو مؤثر خطي على U يرمز له بالرمز αT ويعرف بالشكل:

$$(\alpha T)x) = \alpha(Tx) \quad ; \quad \forall x \in U$$

3. تركيب مؤثرين خطيين (جداء مؤثرين)

إن تـــركيب المؤثـــرين الخطيين T_2, T_1 على الفضاء المتجهي U هو مؤثر خطي على U يرمز له بـــ T_1, T_2 ويعرف بالشكل:

$$(T_1 - T_2)(x) = T_1(T_2(x)) \quad , \quad \forall x \in U$$

ملاحظة (4.2.1):

إن $T_1 . T_2 \neq T_2 . T_1$ في الحالة العامة.

ملاحظة (4.2.2):

ســـوف نرمـــز لمجموعـــة كل المؤثرات الخطية على الفضاء المتجهي U بالرمز $L(V.V)$

إن من خواص المؤثرات الخطية على الفضاء المتجهي V نذكر ما يلي:

1. $\alpha(T_1.T_2) = (\alpha T_1).T_2$
2. $(T_1 + T_2)T_3 = T_1 T_2 + T_2 . T_3$
3. $T_1(T_2 + T_3) = T_1 T_2 + T_2 T_3$
4. $(T_1 . T_2)T_3 = T_1(T_2 . T_3)$

وذلـــك مهمـــا يكـــن T_2, T_1 و T_3 مـــن $L\ (V.V)$، α من الحقل k إن برهان هذه الخـــواص ينتج مباشرة من تعريف المؤثر الخطي، وتعريف جداء مؤثرين خطيين وكذلك من تعريف جداء مؤثر خطي بعدد.

ملاحظة (4.2.3):

إن الخاصـــة الرابعة تسمح بتعريف الجداء $T_1, T_2, ..., T_n$ لعدد منته من المؤثرات الخطيـة $L(V.V)$ وبشـكل خاص فإنه يمكننا تعريف القوة n للمؤثر الخطي T بالعلاقة $T^n = T, T, ..., T$ (n مرة) واعتماداً على ما سبق فإننا نلاحظ أن:

$$T^{n+m} = T^n . T^m$$

مثال (4.2.1):

ليكن لدينا المؤثر الخطي: $T: \Re^3 \to \Re^3$ والمعرف بالشكل:

$$T(x, y, z) = (o, x, y) \quad , \quad \forall (x, y, z) \in \Re^3$$

فإن كان (a. b. c) متجهاً اختيارياً من الفضاء المتجهي $\Re^3$ فإن:

$$\begin{aligned}(T + I)(\text{a}, b, c) &= T(\text{a}, b, c) + I(\text{a}, b, c) \\ &= (0, \text{a}, b) + (\text{a}, b, c) = (\text{a}, \text{a} + b, b + c) \\ (TI)(\text{a}, b, c) &= T(I(\text{a}, b, c) = T(\text{a}, b, c) = (0, \text{a}, b)\end{aligned}$$

حيث I هو التطبيق (المؤثر) المطابق (Identity operotor)

$$\begin{aligned}T^3(\text{a}, b, c) &= T^2(T(\text{a}, b, c) = T^2(0, \text{a}, b) = T(T(0, \text{a}, b) \\ &= T(0,0,\text{a}) = (0,0,0)\end{aligned}$$

وهكذا نرى أن $T^3 = 0$ (0 هو المؤثر الخطي الصفري، I هو التطبيق المطابق).

تعريف (4.2.2):

نسـمي المؤثـر الخطي T من $L(V.V)$ مؤثراً خطياً قابلاً للعكس إذا وجد مؤثر خطي T_1 بحيث يكون

$$T_1 T = T . T_2 = I \quad ; \quad T_1 \in L(V.V)$$

نسـمي T_1 معكوس المؤثر T. ونرمز له بالرمز T^{-1}. وعليه فإن العلاقة السابقة تكتب على الشكل:

$$T T^{-1} = T^{-1} . T = I$$

نتيجة (4.2.1):

من أجل أي شعاع x من V يكون:

$$T\,T^{-1}x = x$$

نتيجة (4.2.2):

إذا كـــان $T\,T^{-1}x = 0$ فـــإن 0= x وهذا يعني أنه إذا علمنا بأن المؤثر الخطي T يملك مؤثراً معاكساً T^{-1} وكان T x = 0 فإننا نستنتج أن x = 0

مبرهنة (4.2.1):

ليكن U فضاء متجهياً منتهي الأبعاد معرف فوق الحقل k. يكون المؤثر الخطي T على الفضـاء U قابلاً للعكس إذا وفقط إذا كان هذا المؤثر غير شاذ.

البرهان:

لـــزوم الشـــرط: إذا كان المؤثر T قابلاً للعكس فإنه يكون غامراً ومتبايناً. وبوجه خـــاص إذا كان المؤثر الخطي T قابلاً للعكس فإن المتجه الصفري 0 يكون المتجه الوحيد في الفضاء U والذي من أجله تتحقق العلاقة: $T0 = 0$

أي أن المؤثر الخطي T يكون غير شاذ

كفاية الشرط: لنفرض بأن المؤثر الخطي T غير شاذ فهذا يعني أن:

$\ker T = \{0\}$ وبالــتالي يكـــون المؤثر T متبايناً من ناحية أخرى، بما أن الفضاء المتجهي U ذو بعد منتهي فإن:

$$\begin{aligned}\dim U &= \dim(\operatorname{Im} T) + dm(kreT)\\ &= \dim(\operatorname{Im} T) + \dim(\{0\}) = \dim(\operatorname{Im} T) + 0\\ &= \dim(\operatorname{Im} T)\end{aligned}$$

وهـــذا يعني أن $U = \operatorname{Im} T$ أي أن المؤثر T غامر. إذن بذلك نكون قد برهنا على أن المؤثر الخطي T متبايناً وغامراً وبالتالي فهو قابل للعكس وهو المطلوب.

مثال (4.2.2):

ليكن T مؤثرا خطياً على $\Re^2$ معرفاً بالشكل: $T(x,y)=(y,2x-y)$ مهما يكن (x,y) من $\Re^2$.

إن نواة T هي: $\ker T=\{(a.b)\in\Re^2 \quad ; \quad T(a.b)=(0.0)\}$

ليكن (a. b) عنصراً اختيارياً من $\ker T$ فإن:

$$T(a.b)=(b,2a-b)=(0.0)$$

ومنه نستنتج أن a = 0، b = 0 أي أن:

$$\ker T=\{(0.0)\}=\{0\}$$

وهذا يعني أن T غير شاذ وحسب المبرهنة السابقة فإن المؤثر الخطي T يكون قابلاً للعكس.

لإيجاد T^{-1} نفرض أن العنصر (a, b) هو صورة (x. y) وفق المؤثر T أي أن:

$$T(x.y)=(a.b)$$

فيكون العنصر (x, y) صورة (a, b) وفق المؤثر T^{-1} أي أن:

$$T^{-1}(a.b)=(x.y)$$

وحسب تعريف المؤثر T يكون:

$$T(x,y)=(y.2x-y)=(a.b)$$

فإذا أوجدنا y,x بدلالة b, a حصلنا على:

$$y=a, x=a/2+b/2$$

لذا فإن المؤثر T^{-1} يعطي بالعلاقة التالية:

$$T^{1}(a,b)=(a/2+b/2,\ a)$$

ثالثاً/ القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لمصفوفة

(Eigemvalue and eigenvectors of matrix):

لتكن $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من المرتبة $n\times n$ ذات عناصر حقيقية وليكن λ مجهـولاً مـا عندئذ نسمي المصفوفة $A-\lambda E$ حيث مصفوفة الوحدة من المرتبة $n\times n$ بالمصـفوفة المميـزة (Characteristic matrix) للمصفوفة A وبما أن λ يقع على القطر الرئيسي للمصفوفة λE وحيث أن بقية عناصر هذه المصفوفة تساوي الصفر فإن:

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \qquad (4.3.1)$$

إن قيمة محددة المصفوفة (4.3.1) تكون كثيرة حدود في λ أي:

$$\det[A-\lambda E]=(-1)^n\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\ldots+c_n \qquad (4.3.2)$$

إن كثيرة الحدود من الدرجة n أيضاً، والحد الذي يحوي أكبر أس للمجهول λ هو $(-1)^n\lambda^n$ أمـا بقية الحدود فإن درجتها أقل من ذلك ويمكن بسهولة إيجاد معاملات كثيرة الحدود هذه فمثلاً معامل λ^{n-1} هو:

$$(-1)^n(a_{11}+a_{12}+\ldots+a_{nn})$$

أما الحد المطلق فينطبق على محددة المصفوفة A.

نسـمي كثيرة الحدود (4.3.2) من الدرجة n بكثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A (characteristic polynomial of A) كمـا نسمي جذور كثيرة الحدود والتي يمكن أن تكون حقيقية أو مركبة بالجذور المميزة (characteristic roots) .

إذا وضـعنا $\det[A-\lambda E]=0$ عندئذ نحصل على معادلة نسميها المعادلة المميزة للمصفوفة A(Characteristic equation A) .

تعريف (4.3.1):

ليكـن التطبيق الخطي $T:V\to V$ حيث V فضاء متجهي منتهي البعد فوق الحقل

k، نقــول عن العدد المجهول λ من k إنه قيمة ذاتية لـ T (Eigenvalue of T) إذا وجد متجه غير صـفري V من V بحيث يكون:

$$T(v) = \lambda v$$

نسمي كل متجه يحقق العلاقة (4.3.3) متجهاً ذاتياً لـ T مقابلاً للقيمة الذاتيــة λ (Eigen vector of T Corresponding toλ)

إذا كــانت A مصـــفوفة مــربعة $n \times n$ على الحقل k، إن القيمة الذاتية للمصفوفة المربعة A(Eigen value of A) تعني، قيمة ذاتية لـ A عندما ينظر إلى A على أنها مؤثر خطي على k بمعنى أن:

تعريف (4.3.2):

لتكن A مصفوفة مربعة من الرتبة $n \times n$، نسمي متجه العمود غير الصفري v من k^n متجهاً ذاتياً للمصفوفة A (eigenvector of A) إذا كان:

$$A\upsilon = \lambda\upsilon \qquad (4.3.4)$$

مــن أجــل أي قيمة للمجهول λ ، إن λ نسميه قيمة ذاتية للمصفوفة A, υ نسميه متجهاً ذاتياً لـ A مرتبطاً بالقيمة الذاتية λ(λ Charenponding to).

ملاحظة:

بمــا أن A مصفوفة مربعة من الرتبة $n \times n$ فإن العلاقة (4.3.4) يمكن أن نكتبها بالشكل:

$$Av = \lambda E v \qquad (4.3.5)$$

حيث E مصفوفة الوحدة من المرتبة n.

إن (4.3.5) تكافئ:

$$\left[A - \lambda E\right]v = 0 \qquad (4.3.6)$$

حيث λ أية قيمة ذاتية لـ A، إن المعادلة (4.3.6) لها حل غير صفري إذا وفقط

إذا كان:

$$\det[A - \lambda E] = 0$$

مثال (4.3.4):

أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المرتبطة بها المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل:

إن التطبيق المرافق لهذه المصفوفة هو: $T : \Re^2 \to \Re^2$

لنبحث عن عدد A ومن متجه = $v = \begin{bmatrix} v \\ y \end{bmatrix}$ بحيث تتحقق (4.3.4)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ومنه نجد أن:

$$x + 2y = \lambda x \Rightarrow (1 - \lambda) + 2y = 0$$
$$3x + 2y = \lambda y \Rightarrow 3x + (2 - \lambda)y = 0$$

لكي يكون لجملة المعادلتين السابقتين حل غير الحل الصفري يجب أن تكون محددة مصفوفة معاملاتها تساوي الصفر أي:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

وبالتالي نجد أن القيم الذاتية هي إما $\lambda = -1, \lambda = 4$

عندما $\lambda = 4$ نحصل على المتجه الذاتي (بعد الرجوع إلى جملة المعادلتين السابقتين وحلهما).

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

أما عندما $\lambda = -1$ فنحصل على المتجه الذاتي:

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

يمكننا فيما يلي إيراد المبرهنة ذات الأهمية ، والتي غالباً ما تستخدم كتعريف.

مبرهنة (4.3.1):

ليكـــن $T: V \to V$ تطـــبيقاً خطياً على الفضاء المتجهي V فوق الحقلk ولتكن λ $\lambda \in k$ عـــندئذ λ قيمـــة ذاتيـــة للتطبيق T إذا وفقط إذا كانت المصفوفة المقابلة للتطبيق $(\lambda I - T)$ شاذة حيث I هو التطبيق المطابق (Identity mapping) كما تكون القيم الذاتية λ نواة التطبيق $(\lambda I - T)$.

البرهان:

تكـــون λ قيمـــة ذاتيـــة للتطبيق T إذا وفقط إذا وجد متجه غير صفري V بحيث تكون: $T(v) = \lambda v$ أو:

واستناداً لتعريف التطبيق المطابق نجد: $I(V) = V$ ومن ثم فإن:

$$T(V) = \lambda\, I(V)$$

ومنه فإن:

$$\lambda\, I(V) - T(V) = (\lambda I - T)V = 0$$

وبما أن $V \neq 0$ فإن التطبيق $(\lambda I - T)$ شاذ، كما أن أية قيمة تحقق العلاقة السابقة هي قيمة ذاتية، فإذا كانت λ هي قيمة ذاتية فهي نواة التطبيق $(\lambda I - T)$.

مبرهنة (4.3.2):

المتجهات الذاتية المرتبطة بقيم ذاتية مختلفة هي متجهات مستقبلة خطياً:

البرهان:

بفـــرض أن $T: V \to V$ تطـــبيقاً وأن $v_1, v_2, \dots, v_n$ متجهات ذاتية غير معدومة

مقابلة (مرتبطة) بالقيم الذاتية المختلفة $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ عندئذ يكون:

(i) إذا كانت n=1 فلدينا عندئذ متجه واحد v_1، وهو مستقل خطياً باعتبار $v \neq 0$.

(ii) بفرض $v > 1$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0 \qquad (*)$$

حيث $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ قيم عددية من الحقل k، إذا طبقنا T على العلاقة (*) نحصل وحسب تعريف التطبيق الخطي، على العلاقة التالية:

$$\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ... + \alpha_n T(v_n) = 0 \qquad (4.3.3)$$

بضرب العلاقة (*) بـ λ_n حيث $\lambda \neq 0$ نحصل على:

$$\alpha_1 \lambda_n (v_1) + \alpha_2 \lambda_n (v_2) + ... + \alpha_n \lambda_n (v_n) = 0 \qquad (4.3.4)$$

وبطرح العلاقتين (4.3.4) من (4.3.3) مع الأخذ بعين الاعتبار أن $T(v_i) = \lambda_i v_i$ (حسب تعريف القيم الذاتية) نحصل على:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_2)v_2 + ... + \alpha_n(\lambda_{n-1} - \lambda_n)v_{n-1} = 0$$

وباعتبار أن $\lambda_i - \lambda_n \neq 0$ من أجل $i \neq n$ فإنه يكون $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ والتي تعني أن المتجهات $v_1, v_2, ..., v_n$ مستقلة خطياً.

مثال (4.3.2):

أوجد القيم الذاتية للمصفوفة A التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

إن:

$$A - \lambda E = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

ومنه نجد أن كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A:

$$\det\begin{bmatrix}3-\lambda & 2\\ -1 & -\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2-3\lambda+2$$

والمعادلة المميزة للمصفوفة A هي:

$$\lambda^2-3\lambda+2=0$$

وحل هذه المعادلة هي القيم $\lambda=2\,,\lambda=1$ وهي القيم الذاتية للمصفوفة A.

مثال (4.3.3):

أوجد القيم الذاتية للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 4 & -17 & 8\end{bmatrix}$$

إن كثيرة الحدود المميزة لهذه المصفوفة هي:

$$\det[A-\lambda E]=-\lambda^3+8\lambda^2-17\lambda+4$$

والمعادلة المميزة للمصفوفة A هي:

$$\lambda^3-8\lambda^2+17\lambda-4=0$$

والتي نكتبها :

$$(\lambda-4)(\lambda^2-4\lambda+1)=0$$

والقيم الذاتية هي:

$$\lambda=4\quad,\quad\lambda=2+\sqrt{3}\quad,\quad\lambda=2-\sqrt{3}$$

إن المبرهنة التالية تلخص ما سبق.

مبرهنة (4.3.3):

إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة $n\times n$، λ عدد حقيقي فعندئذ

الموضوعات التالية متكافئة.

(a) λ قيمة ذاتية للمصفوفة A.

(b) جملة المعادلات المتجانسة $[A-\lambda E]v=0$ حيث v متجه عمود، لها حل غير تافه (غير الحل الصفري) (nontrivial solution)

(c) يوجد متجه غير صفري v من $\Re^n$ بحيث أن $Av=\lambda v$

(d) λ هي حل للمعادلة المميزة $\det[A-\lambda E]=0$

تعريف (4.3.3):

نسمي فضاء الحل لجملة المعادلات المتجانسة $[A-\lambda E]v=0$ حيث v متجه عمود بالفضاء الذاتي للمصفوفة A المرتبط بالقيمة الذاتية (Eigenspace of A Corresponding to λ).

مثال (4.3.4):

أوجد قاعدة للفضاءات الذاتية للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

إن المعادلة المميزة لهذه المصفوفة هي:

$$\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=0$$
$$(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$$

والقيم الذاتية هي: $\lambda=2$, $\lambda=1$ وبالتالي يوجد فضاءان ذاتيان.

استناداً للتعريف (4.3.3) إذا أخذنا:

$$v=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

فإن:

$$[A-\lambda E]v=\begin{bmatrix}-\lambda & 0 & -2\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}-2x_1-3x_3&=0\\ x_1+x_3&=0\\ x_1+x_3&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow x_1=-x_3$$

x_2 اختياري فإذا أخذنا $x_1=5$, $x_3=-5$ ولنختار $x_2=t$ ومنه نجد أن $x_1=5$, $x_2=t$, $x_3=-5$ وتكون المتجهات الذاتية للمصفوفة A المقابلة للقيمة الذاتية $\lambda=2$ هي:

$$v_1=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\t\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\0\\-5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\t\\0\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

والمتجهات $(0.1.0)$، $(1.0.-1)$ مستقلان خطياً وهما يشكلان قاعدة للفضاء الذاتي للمصفوفة A المقابل للقيمة الذاتية A=2

إذا عوضنا $\lambda=1$ في (*) ثم نحل جملة المعادلات المتجانسة الناتجة نحصل على

$$x_1=-25\ ,\ x_2=5\ ,\ x_3=5$$

حيث 5 قيمة اختيارية لـ x_3 ومنه نجد أن:

$$v=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-25\\5\\5\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$$

والمتجه $(1.\ 1.\ 2-)$ المقابل للقيمة الذاتية $\lambda=1$ هو قاعدة للفضاء الذاتي المقابل لهذه القيمة.

حالات خاصة:

أ) القيم الذاتية للمصفوفات المثلثية (Eigenvlues of triangular matrix):

إن القيــم الذاتية للمصفوفة المثلثية يتسم مناقشتها بنفس الطريقة السابقة للمصفوفات غير المثلثية إلا أنها في المصفوفة المثلثية تكون أكثر بساطة:

مثال (4.3.5):

أوجد القيم الذاتية للمصفوفة المثلثية العليا:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

إن كثيرة الحدود المميزة لهذه المصفوفة:

$$\det[A - \lambda E] = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\cdots(a_{nn} - \lambda)$$

والمعادلة المميزة:

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\cdots(a_{nn} - \lambda) = 0$$

والقيم الذاتية هي:

$$\lambda = a_{11}, \lambda = a_{22}, \ldots, \lambda = a_{nn}$$

إن المبرهــنة الــتالية تــبيّن بشــكل واضح (جلي) (Evident) حساب القيم الذاتية للمصفوفات المثلثية.

مبرهنة (4.3.4):

إذا كــانت A مصفوفة مثلثية (عليا أو سفلي أو نظرية) فعندئذ تكون القيم الذاتية لـــ A مساوية لعناصر القطر الرئيسي لـــ A.

مثال (4.3.6):

أوجد القيم الذاتية للمصفوفة A:

$$A=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ -1 & 8 & 0\\ 5 & -8 & -2\end{bmatrix}$$

إن القيم الذاتية لـــ A $\lambda=6\ ,\ \lambda=8\ ,\ \lambda=-2$

ب) القيم الذاتية لقوى مصفوفة (Eigenvalue of power of matrix):

لقـد رأيــنا في دراستنا السابقة كيفية إيجاد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لمصفوفة مـربعة A ومــن الســهل إيجــاد القيــم الذاتية والمتجهات الذاتية لقوى صحيحة موجبة للمصفوفة المربعة A.

فمثلاً إذا كانت A قيمة ذاتية للمصفوفة المربعة υ,A متجه ذاتي مقابل للقيمة الذاتية A فإن:

$$A^2.v=A(Av)=A(\lambda v)=\lambda(Av)=\lambda(\lambda v)=\lambda^2 v$$

والــتي تبيّن أن λ^2 هي قيمة ذاتية للمصفوفة المربعة A^2 وأن v متجه ذاتي مقابل للقيمة الذاتية هذه. وبشكل عام نحصل على المبرهنة التالية:

مبرهنة (4.3.5):

إذا كــان k عــدداً صحيحاً موجباً، λ قيمة ذاتية للمصفوفة A ,v متجهاً ذاتياً مقابلاً للقيمة الذاتية λ فإن λ^k قيمة ذاتية لـــ A^k و v متجهاً ذاتياً.

البرهان:

يترك كتمرين.

مثال (4.3.7):

أوجد القيم الذاتية للمصفوفة A^7 حيث:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

لقـد وجدنـا فـي المثال (4.3.4) إن القيم الذاتية لهذه المصفوفة $\lambda = 2$, $\lambda = 1$ واسـتناداً للمبرهنة (4.3.5) نجد أن القيم الذاتية هي: $\lambda = 2^7 = 128$, $\lambda = 1^7 = 1$ هي قيمة ذاتية للمصفوفة A^7.

أما المتجهات الذاتية فهي $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ وهما متجهان ذاتيان لـ A مقابلان للقيمة الذاتيـة $\lambda = 2$ واسـتناداً لـنفس المبرهنة (4.3.5) فإن المتجهات الذاتية للمصفوفة A^7 المقابـلة للقيمة الذاتية $\lambda = 2^7 = 128$ هي نفس المتجهات المذكورة أعلاه وبشكل مشابه نجـد أن المـتجه $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ هو متجه ذاتي للمصفوفة وهو أيضاً متجه ذاتي للمصفوفة A^7 مقابل للقيمة الذاتية $\lambda = 1^7 = 1$

تعريف (4.3.4):

المصفوفة المربعة A نسميها مصفوفة قابلة للإقطار (أو التقطير) (Diagonal label) إذا وجـدت مصـفوفة قابـلة للعكس P بحيث أن $P^{-1} A P$ مصفوفة قطرية (Diagonal matrix) المصفوفة P نسميها مصفوفة الإقطار للمصفوفة A (Diagonal A).

مبرهنة (4.3.5):

إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة $n \times n$ فعندئذ الموضوعات التالية متكافئة (أو الشروط التالية متكافئة):

(a) A قابلة للإقطار.

(b) A تملك n متجهاً من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً.

البرهان:

$(a \Rightarrow b)$: بمـا أن A قابلة للإقطار فحسب التمرين (4.3.4) يوجد مصفوفة قابلة للعكس P:

$$P=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{n1} & p_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

بحيث أن $P^{-1} A P$ مصفوفة قطرية

لنضع $P^{-1} A P = D$ حيث:

$$\Delta=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

من $P^{-1} A P = \Delta$ نجد أن:

أي: $A P = \Delta P$

$$A.P=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{4.3.5}$$

$$=\begin{bmatrix} \lambda_1 P_{11} & \lambda_2 P_{12} & \cdots & \lambda_n P_{1n} \\ \lambda_1 P_{21} & \lambda_2 P_{22} & \cdots & \lambda_n P_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1 P_{n1} & \lambda_2 P_{n2} & \cdots & \lambda_n P_{nn} \end{bmatrix}$$

من المساواة الأخيرة نجد أن أعمدة المصفوفة A .P هي:

$\lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2, \dots, \lambda_n P_n$ حيث P_1 هو العمود الأول في المصفوفة P، P_2 هو العمود الـثاني وهكـذا.. P_n هـو العمـود ذو الرقم n في المصفوفة P من ذلك نجد أنه استناداً لحاصل ضرب المصفوفات..) إن:

:(4.3.6)

$$AP_1 = \lambda_1 P_1 \,,\, AP_2 = \lambda_2 P_2 \,,\dots,\, AP_n = \lambda_n P_n$$

وبما أن المصفوفة P قابلة للعكس فإن متجهات أعمدتها جميعاً مخالفة للصفر ومنه نجد من العلاقات (4.3.6) أن $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ هي متجهات ذاتية المصفوفة A.

وأن $P_1, P_2, ..., P_n$ مستقلة خطياً، وبالتالي فإن A تملك n متجهاً ذاتياً مستقلة خطياً.

$(b \Rightarrow a)$: لنفرض أن A n من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً مثل $P_1, P_2, ..., P_n$ والموافقة للقيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ على الترتيب ولتكن:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{n1} & p_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

مصفوفة متجهات أعمدتها هي المتجهات $P_1, P_2, ..., P_n$ عندئذ نجد أن الجداء A. P يكون

$$AP_1 . AP_2, ..., AP_n$$

لنضع:

$$AP_1 = \lambda_1 P_1 \ , AP_2 = \lambda_2 P_2 \ , ... , AP_n = \lambda_n P_n$$

عندئذ نجد:

$$A.P = \begin{bmatrix} \lambda_1 P_{11} & \lambda_2 P_{12} & \cdots & \lambda_n P_{1n} \\ \lambda_1 P_{12} & \lambda_2 P_{22} & \cdots & \lambda_n P_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1 P_{1n} & \lambda_2 P_{n2} & \cdots & \lambda_n P_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A.P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{12} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{1n} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= P \Delta \qquad (4.3.6)$$

حيث Δ مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي هي القيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$

وبما أن متجهات الأعمدة في المصفوفة P هي متجهات مستقلة خطياً، P قابلة للعكس فمن (4.3.6) يمكننا أن نكتب: $P^{-1} A P = \Delta$

اي أن المصفوفة A قابلة للإقطار.

مثال (4.3.8):

أوجد المصفوفة P التي تحول المصفوفة A التالية إلى مصفوفة قطرية:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

لقد وجدنا في المثال (4.3.4) أن المعادلة المميزة لهذه المصفوفة هي:

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

والقيم الذاتية هي $\lambda = 2$, $\lambda = 1$ وقد وجدنا أن قاعدة الفضاء الذاتي الأول المقابل للقيمة الذاتية $\lambda = 2$ مؤلفة من شعاعين:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وأن قاعدة الفضاء الذاتي المقابل للقيمة الذاتية A=1 هو الشعاع $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ إذا الأشعة:

$$P_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \ P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \ P_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

هي أشعة مستقلة خطياً ولنأخذ المصفوفة

$$P=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

فنجد أن:

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

مبرهنة (4.3.6):

إذا كـــانت A مصفوفة مربعة من المرتبة $n\times n$ وتملك n قيمة ذاتية مختلفة فإنA قابلة للإقطار.

البرهان:

إذا كـــانت $v_1,v_2,\ldots,v_n$ مـــتجهات ذاتية مقابلة للقيم الذاتية المختلفة $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ فإنـــه حســب المبرهنة (4.3.2) تكون $v_1,v_2,\ldots,v_n$ متجهات مستقلة خطياً وبالتالي فإن المصفوفة A قابلة للإقطار استناداً للمبرهنة (4.3.5).

إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة $n\times n$ وإذا كانت P مصفوفة قابلة للعكس فإننا نجد

$$(P^{-1}AP)^2=P^{-1}APP^{-1}AP=P^{-1}AEAP=P^{-1}A^2P \qquad (*)$$

ومنه فإننا نستطيع تعميم (*) من أجل أي عدد صحيح موجب k أي

$$(P^{-1}AP)^k=P^{-1}A^kP \qquad (**)$$

إذا كانت A مصفوفة قابلة للإقطار وإذا كان:

$P^{-1}AP = \Delta$ حيث Δ مصفوفة قطرية

فإن:

(***) $$P^{-1}A^k P = (P^{-1}AP)^k = \Delta^k$$

من المساواة الأخيرة نجد أن

(****) $$A^k = P\Delta^k P^{-1}$$

مثال (4.3.9):

لتكن A هي المصفوفة الواردة في المثال (4.3.8) والمطلوب

اوجد A^{13} لقد وجدنا في المثال (4.3.8) أن المصفوفة A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة قابلة للإقطار ووجدنا أن P:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وعندئذ نجد:

$$\Delta = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

واستناداً إلى (****) نجد أن:

$$A^{13} = P\,D^{13}P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{13} & 0 \\ 0 & 1 & 1^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8190 & 0 & -16382 \\ 8191 & 8192 & 8191 \\ 8191 & 0 & 16383 \end{bmatrix}$$

لما كانت كل مصفوفة تقابل تطبيق خطي وبالعكس كل تطبيق خطي تقابله مصفوفة فإننا نستطيع أن نقول

تعريف (4.3.5):

نســمي التطبيق الخطي T من الفضاء المتجهي منتهى البعد V إلى الفضاء منتهى V(من الفضاء في نفسه) تطبيقاً قابلاً للإقطار إذا كانت مصفوفته قابلة للإقطار.

مبرهنة (4.3.7):

ليكن $T:V \to V$ تطبيق خطي من الفضاء منتهى البعد V في نفسه (dim V = n) عندئذ T يمكن أن تمثل بمصفوفة قطرية من الشكل:

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

إذا وفقط إذا وجدت قاعدة $v_1, v_2, ..., v_n$ لـ V بحيث يكون:

$$T(v_1) = k_1 v_1 \,, T(v_2) = k_2 v_2 ,..., T(v_n) k_n v_n$$

والــتي تعــني أن مثل هذه المتجهات $v_1, v_2, ..., v_n$ هي متجهات ذاتية التطبيق T مقابلة للقيم الذاتية $k_1, k_2, ..., k_n$

البرهان:

يترك للقارئ كتمرين.

مبرهنة (4.3.8):

التطـــبيق الخطـــي $T:V \to V$ من فضاء منتهى البعد V في نفسه يمكن أن يمثل بمصـــفوفة قطـــرية إذا وفقط إذا كانت قاعدة V هي المتجهات الذاتية للتطبيق T، ويكون عـــندئذ أيضاً، عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة القطرية هذه هي القيم الذاتية للتطبيق T.

مثال (4.3.10):

ليكن $T:\Re^2 \to \Re^2$ معرف بالشكل:

$$\forall(x,y)\in\Re^2, T(x,y)=(x+2y),(3x+2y)$$

بيّن أن T تطبيق قابل للأقطار.

لنأخذ القاعدة القانونية (النظامية) في $\Re^2$ هي:

$e_1(1,0)$, $e_2(0,1)$ عندئذ:

$$T(e_1)=T(1.0)=(1.3)=1e_1+3e_2$$
$$T(e_2)=T(0.1)=(2.2)=2e_1+2e_2$$

ومصفوفة هذا التطبيق بالنسبة للقاعدة $\{e_1,e_2\}$ هي:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

إن القيـــم الذاتية الموافقة لهذه المصـفوفة هي $\lambda=4$, $\lambda=-1$ والمتجهات الذاتية الموافقة لهذه القيم هي $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ على الترتيب ومنه نجد أن:

$$P=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix} \quad , \quad P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{5}\end{bmatrix}$$

ومنه نجد أن المصفوفة A قابلة للأقطار وذلك لأن:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

وكمـــا نلاحظ فإن عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة الناتجة هي القيم الذاتية للمصفوفة A ومنه فإن T قابل للأقطار.

تعريف (4.3.6):

نقـــول عـــن مؤثرين خطيين g ,f على الفضاء المنتهى البعد V إنهما متشابهان إذا وجد مؤثر قابل للعكس على V بحيث:

$$g = T^{-1} f.T$$

مثال (4.3.1)

ليكن لدينا المؤثرين الخطيين g .f على $\Re^2$ والمعرفين بالشكل:

$$f(x.y) = (2x + y.3x + 2y) \qquad g(x.y) = (4x. - y)$$

بيّن أن g .f متشابهان.

الحل:

استناداً للتعريف علينا البحث عن مؤثر خطي T قابل للعكس على $\Re^2$ إن المؤثر

$$T(x.y) = (2x + y.3x - y)$$

هو مؤثر قابل للعكس على $\Re^2$

لأن:

$$T^{-1}(x.y) = \left(\frac{x+y}{5}, \frac{3x-2y}{5} \right)$$

ومن ثم فإن:

$$(T^{-1} fT)(x.y) = T^{-1}(f(2x+y,3x-y)) = T^{-1}(8x-y),2x+y) = 4x,-y) = g(x.y)$$

بعـد دراسـة كـثيرة الحدود المميزة لمصفوفة والمعادلة المميزة لمصفوفة نورد المبرهنة التالية التي يمكن أن نستخدمها في إيجاد معكوس مصفوفة مربعة غير شاذة.

مبرهنة كويلي – هاملتون (Coyley - - Hamilton theorem):

كل مصفوفة مربعة هي جذر لكثيرة حدودها المميزة.

البرهان:

لـتكن A مصفوفة مربعة اختيارية من المرتبة $n\times n$ وليكن $\Delta(\lambda)$ كثيرة حدودها المميزة عندئذ يكون:

$$\Delta(\lambda)=\det[A-\lambda E]=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0$$

لنفرض أن $B(\lambda)$ هي مصفوفة المتجهات الجبرية للمصفوفة $[A-\lambda E]$، عناصر $B(A)$ هي متجهات جبرية للمصفوفة $[A-\lambda E]$ وبالتالي فهي كثيرات حدود في λ من درجة لا تزيد على n-1 لذا فإن:

$$B(\lambda)=B_{n-1}\lambda^{n-1}+B_{n-2}\lambda^{n-2}+\ldots+B_1\lambda+B_0$$

حيث B_i مصفوفات مربعة على الحقل k لا تعتمد على A واستناداً إلى:

$$[A-\lambda E]B(\lambda)=\det[A-\lambda E]-E$$

والتي تكتب على الشكل:

$$\begin{aligned}&[A-\lambda E](B_{n-1}\lambda^{n-1}+B_{n-2}\lambda^{n-2}+\ldots+B_1\lambda+B_0)\\&\quad=(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0)E\end{aligned}$$

فإذا حذفنا الأقواس وساوينا بين العاملات المختلفة لقوى λ نجد أن:

$$\begin{aligned}-B_{n-1}&=E\\AB_{n-1}-B_{n-2}&=a_{n-1}E\\AB_{n-2}-B_{n-3}&=a_{n-2}E\\&\vdots\\AB_1-B_0&=a_1E\\AB_0&=a_0E\end{aligned}$$

وبضـــرب المعادلات الصفوفية السابقة بـــ $A^n A^{n-1},\ldots,A.E$ على الترتيب فإننا نجد:

$$
\begin{aligned}
-A^n B_{n-1} &= A^n \\
A^n B_{n-1} - A^{n-1} B_{n-2} &= a_{n-1} A^{n-1} \\
A^{n-1} B_{n-2} - A^{n-2} B_{n-3} &= a_{n-2} A^{n-2} \\
&\vdots \\
&\vdots \\
A^2 B_1 - A B_0 &= a_1 A \\
A B_0 &= a_0 E
\end{aligned}
$$

بجمع المعادلات المصفوفية السابقة طرفاً لطرف نجد:

$$0 = A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E$$

إن العلاقة الأخيرة تعني أن:

$\Delta(\lambda) = 0$ أي أن A جذر لكثيرة حدودها المميزة.

مثال (4.3.12):

بيّن أن المصفوفة المربعة A التالية هي جذر لكثيرة حدودها المميزة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

إن كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي:

$$\Delta(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 14\lambda + 4$$

لنعوض كل λ بـــ A نجد:

$$\Delta(\lambda) = -A^3 + 5A^2 - 14A + 4E$$

وبتعويض المصفوفة A بما يساويها نجد:

$$\Delta(\lambda)=\begin{bmatrix}35 & -3 & 15\\ 22 & 34 & 6\\ -4 & -60 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-25 & 45 & -15\\ -50 & -10 & -20\\ 60 & 60 & 20\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}-14 & -42 & 0\\ 28 & -28 & 14\\ -56 & 0 & -28\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

مثال (4.3.13):

بيّـن أن المصفوفة المربعة الواردة في المثال (4.3.1) تحقق معادلتها المميزة، لقد وجدنا أن كثيرة الحدود المميزة لهذه المصفوفة هي:

$$\Delta(\lambda)=\lambda^2-3\lambda-4$$

والمعادلة المميزة هي: $\lambda^2-3\lambda-4=0$

فإذا بدلنا كل λ بـــ A نجد:

$$\Delta(A)=A^2-3A-4E=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7 & 6\\ 9 & 10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & -6\\ -9 & -6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

مثال (4.3.14):

لتكن المصفوفة المربعة $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ والمطلوب:

(i) أوجد القيم الذاتية للمصفوفة A والمتجهات الذاتية وقاعدة الفضاء الذاتي بكل منها.

(ii) أوجد المصفوفة B بحيث تكون $P^{-1}A\,P$ مصفوفة قطرية.

الحل:

نوجد المعادلة المميزة للمصفوفة A.

$$\det[A-\lambda E]=0 \Rightarrow (\lambda-5)(\lambda+1)=0$$

وجــذور هــذه المعادلــة هي $\lambda=5\,,\lambda=-1$ وهي القيم الذاتية للمصفوفة A إن المتجهات الذاتية الموافقة لــ $\lambda=5$

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومــنه نجــد أن x=y فإذا فرضنا أن y=1، x=1 نحصل على المتجه الذاتي الأول $v_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ وهو يشكل قاعدة للفضاء الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\lambda=5$

من أجل $\lambda=-1$ بنفس الطريقة نحصل على $\upsilon=-2y$ فإذا كانت $y=-1$ نجد $x=2$ والمــتجه الذاتــي $v_2=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ وهــو يشــكل قاعدة للفضاء الذاتي المتعلق بالقيمة الذاتية $\lambda=-1$

لنأخذ:

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad P=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

ومنه نجد أن:

$$B=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

مثال (4.3.15):

أوجــد القيم الذاتية وقواعد الفضاء الذاتي لكل من المصفوفتين التاليتين، وأي منهما

يمكن تحويلها إلى شكل قطري (بمعنى: أيا منها قابلة للإقطار)

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -1\\ 7 & 5 & -1\\ 6 & 6 & -2\end{bmatrix}$$

الحل:

إن القيم الذاتية للمصفوفة A هي جذور المعادلة:

$$\det[A-\lambda E]$$

$$\Delta(\lambda)=\begin{bmatrix}1-\lambda & -3 & 3\\ 3 & -5-\lambda & 3\\ 6 & -6 & 4-\lambda\end{bmatrix}=0$$

بفك هذه المحددة نجد:

$$\Delta(\lambda)=(\lambda+2)^2(\lambda-4)=0$$

والقيم الذاتية هي:

$$\lambda=-2\,,\lambda=4$$

إذا كانت $\lambda=-2$ نحصل على جملة المعادلات المتجانسة:

$$\begin{bmatrix}3 & -3 & 3\\ 3 & -3 & 3\\ 6 & -6 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

إن جملة هذه المعادلات تتحول إلى معادلة:

$$x-y+z=0$$
$$x=y-z$$

لدينا مجهولين اختياريين هما (مثلاً) y. z إن أي متجه $v=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ يمكن أن نكتبه

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-z \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ولدينا إذن متجهان ذاتيان مقابلان للقيمة $\lambda = -2$ هما:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

إن v_1 , v_2 يولـــدان الفضـــاء الذاتـــي المقـــابل للقيمة الذاتية $\lambda = -2$ مستقلان خطياً وبالتالي يشكلان قاعدة له.

عـــندما $\lambda = 4$ بـــنفس الطـــريقة السابقة نحصل على المتجه الذاتي $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ وهو

يشكل قاعدة للفضاء الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\lambda = 4$

إن المتجهات الثلاثة السابقة v_1 , v_2 , v_3 مستقلة خطياً.

لنفرض أن:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ومنه نجد أن:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

أي أن المصـــفوفة A يمكـــن تحويلها إلى مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي هي القيم الذاتية للمصفوفة المربعة A.

إن القيـــم الذاتيـــة للمصفوفة المربعة B هي أيضاً $\lambda = 2 , \lambda = 4$ (جذر مضاعف)

من اجل $\lambda = -2$ نحصل جملة معادلات متجانسة تؤول إلى الجملة

$$x - y + z = 0$$
$$x + y = 0$$

ومنه نجد أن:

$$x = -y \quad , \quad z = 2y$$

وأن أي v_1 حيث:

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ y \\ 2y \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

أي أنـــه يوجـــد فقـــط متجه وحيد يشكل قاعدة للفضاء الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\lambda = -2$

مـــن أجل $\lambda = 4$ نحصل على المتجه $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ وهو يشكل قاعدة الفضاء الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\lambda = 4$.

نلاحـــظ هـــنا أن المصـــفوفة B لا يمكن تحويلها إلى مصفوفة قطرية إذ أن B لها مـــتجهين مستقلين خطياً، وبالتالي فإن المصفوفة A يمكن إقطارها. بينما B لا يمكن رغم أنهما يملكان نفس القيم الذاتية.

وفـــي خـــتام هذه الفقرة يمكن أن تعطي تطبيقاً مبرهنة تايلي – هاملتون في حساب معكـــوس مصـــفوفة مـــربعة إذا كانت المصفوفة A غير شاذة فإنه يمكننا إيجاد معكوسها بتطبيق مبرهنة تايلي هاملتون وهذا ما توضحه الأمثلة التالية.

مثال (4.3.16):

أوجد معكوس المصفوفة A التالية باستخدام مبرهنة تايلي هاملتون:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

إن محـــددة A تســاوي $-5 \neq 0$ والمصـــفوفة A غير شاذة استناداً لمبرهنة تايلي هاملتون فإن A تحقق معادلتها المميزة (جذر للمعادلة المميزة).

$$\det[A - \lambda E] = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

ومنه نجد:

$$\Delta(A) = A^2 - 4A - 5E$$

بضرب طرفي العلاقات الأخيرة بـــ A^{-1} نجد (المصفوفة A غير شاذة فيوجد لها معكوس).

$$A - 4E - 5A^{-1} = 0 \qquad (*)$$

لأن:

$$E.A^{-1} = A^{-1} \quad , \quad A.A^{-1} = E$$

من * نجد أن:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}(A - 4E)$$

$$A^{-1}\frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

مثال (4.3.17):

أوجد معكوس المصفوفة المربعة A التالية باستخدام مبرهنة تايلي هاملتون.

$$A = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

المعادلة المميزة لها هي:

$$\begin{aligned}
&\Delta(\lambda) = (2-\lambda)(-1-\lambda) - 3 = 0\\
&\lambda^2 - \lambda - 5 = 0\\
&\Delta(A) = A^2 - A - 5 = 0 \qquad (i)\\
&\det[A - \lambda E] = -5 \neq 0
\end{aligned}$$

نضرب طرفي المساواة (i) بـــ A^{-1} نجد:

$$A - E - 5A^{-1} = 0 \qquad \text{(المصفوفة الصفرية)}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

مثال (4.3.18):

أوجد معكوس المصفوفة المربعة A التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

إن المعادلة المميزة لهذه المصفوفة هي:

$$\det[A - \lambda E] = -\lambda^3 - 5\lambda^2 - 14\lambda + 4 = 0$$

كما أن محددة المصفوفة A تساوي 4 والمصفوفة A غير شاذة فلها معكوس.

استناداً إلى مبرهنة تايلي هاملتون:

$$\Delta(A) = -A^3 + 5A^2 - 14A + 4 = 0 \qquad \text{(المصفوفة الصفرية)}$$

بضرب طرفي هذه المساواة بـــ A^{-1} نجد:

$$-A^2 + 5A - 14E + 4A^{-1} = 0 \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 5A + 14E)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} -5 & 9 & -3 \\ -10 & -2 & -4 \\ 12 & 12 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -15 & 0 \\ 10 & -10 & 5 \\ -20 & 0 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & -6 & 12 \\ 0 & 2 & 1 \\ -8 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

مثال (4.3.19):

بيّن أن المصفوفة المربعة A ولمنقولها A^T نفس كثيرة الحدود المميزة.

الحل:

بما أن:

$$[A-E\lambda]^T = \left[A^T - \lambda E^T\right] = \left[A^T - \lambda E\right] \qquad (*)$$

ولما كان للمصفوفة المربعة A ولمنقولها محدداً واحداً فإن:

$$\det[A-\lambda E] = \det[A-\lambda T]^T$$

واستناداً للعلاقة (*):

$$\det[A-\lambda E]^T = \det\left[A^T - \lambda E\right] = \det\{A-\lambda E\}$$

ومنه ينتج أن للمصفوفة المربعة A ولمنقولها نفس كثيرات الحدود المميزة.

تمارين

1.برهن أن كلاً من التطبيقات التالية خطية:

(a) $f:\Re^3 \to \Re^3$ والمعرف بالشكل.

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,2x_2.3x_2)$$

(b) $f:\Re^3 \to \Re^2$ المعرف بالشكل:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_3,x_1+x_2)$$

(c) $f:\Re \to \Re^2$ المعرف بالشكل:

$$f(x)=(2x,3x)$$

2. بيّن أن كلاً من التطبيقات التالية ليس خطياً:

(a) $f:\Re^2 \to \Re^2$ والمعرف بالشكل.

$$f(x_1,x_2)=(x_1^2,x_2^2)$$

(b) $f:\Re^2 \to \Re$ المعرف بالشكل:

$$f(x_1,x_2)=|x_1-x_2|$$

(c) $f:\Re^3 \to \Re^2$ المعرف بالشكل:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+1,x_2+x_3)$$

(d) $f:\Re \to \Re^2$ والمعرف بالشكل.

$$f(x)=(x,1)$$

(c) $f:\Re^3 \to \Re^3$ المعرف بالشكل:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2,x_2,x_3)$$

3. لنأخذ التطبيق الخطي $f:\Re^3 \to \Re$ المعرف بالشكل:

$$f(0.1.-2)=1 \quad , \quad f(1.1.1)=3 \quad , \quad f(0.0.1)=-2$$

أوجد $f(x_1, x_2, x_3)$ مهما يكن (x_1, x_2, x_3) من $\Re^3$

4. بفرض أن $V = V_1 + V_2$ حيث:

$$\upsilon = v_1 + v_2 \quad , \quad v_1 \in V_1 \quad v_2 \in V_2$$

برهن أن التطبيقات التالية على V والمعرفة بالشكل:

(a) $f(v) = v_1$

(b) $f(v) = v_2$

(c) $f(v) = v_1 - v_2$

هي تطبيقات خطية.

5. ليكن التطبيقان الخطيان المعرفان كما يلي:

$$f : \Re^3 \to \Re^2 \quad : \quad f(x.y.z) = (2x.y + z)$$
$$g : \Re^3 \to \Re^2 \quad : \quad g(x.y) = (x.\lambda)$$

أوجـــد $g \text{ o } f$. هـــل يمكن إيجاد $g \text{ o } f$؟ ثم أوجد مصفوفة كل منهما بالنسبة للقاعدة النظامية (القانونية) في الفضاءات المعطاة.

6. ليكن التطبيقان الخطيان $g.f$ المعرفان بالشكل:

$$f : \Re^3 \to \Re^2 \quad : \quad f(x.y.z) = (y.x + z)$$
$$g : \Re^2 \to \Re^2 \quad : \quad g(x.y) = (2x, x + 3y)$$

وليكن $h : \Re^2 \to \Re$ تطبيق خطي معرف بالشكل:

$$h(x.y) = (y.2x)$$

أوجد مصفوفة كل من التطبيقات التالية:

$$h \text{ o } g \, , h \text{ o } f , h \text{ o } g \text{ o } f \, , f \text{ o } (f + y) , h\text{o } f + h \text{ o } g$$

7. أي من المصفوفات التالية قابلة للإقطار:

$$A=\begin{bmatrix}19 & -9 & -6\\ 25 & -11 & -9\\ 17 & -9 & -4\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}-1 & 4 & -2\\ -3 & 4 & 0\\ -3 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 1 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 5\end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

8. أوجد A^{n} حيث:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 7 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 15 & 0\end{bmatrix}$$

ثم أوجد:

$$A^{2301} \quad , \quad A^{-2301} \quad , \quad A^{-1000} \quad , \quad A^{1000}$$

9. ليكن:

$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ بيّن أن:

أ) A قابلة للإقطار إذا كان:

$$(a-d)^2+4bc\le 0$$

ب) A قابلة للإقطار إذا كان:

$$(a-d)^2+4bc<0$$

10. المصـــفوفتان A. B نســـميهما مـــتعامدتين بالتشابه (Orthogonaly semi) إذا وجدت مصفوفة متعامدة P بحيث أن: $B=P^{t}AP$

بيّن أنه إذا كانت A مصفوفة متناظرة (Symmetric) والمصفوفتان A. B متعامدتان بالتشابه فإن B تكون متناظرة.

11. أوجد A^n إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix}3&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&3\end{bmatrix}$$

12. لنأخذ التطبيق الخطي $f:\Re^2\to\Re^3$ المعرف بالشكل:

$$f(0,1)=(2,1,-1)\,,\,f(1,2)=(3,-1,5)$$

أوجد $f(x_1,x_2)$ حيث (x_1,x_2) شعاع اختياري من الفضاء $\Re^2$

13. أوجد رتبة كل من التطبيقات الخطية التالية:

(i) $f:\Re^3\to\Re^3$ المعرف بالشكل:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,2x_2,x_2-x_3,x_1+2x_3)$$

(ii) $f:\Re^3\to\Re^3$ المعرف بالشكل:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(4x_1+3x_2,x_1-x_2,x_1+2x_2+x_3)$$

(iii) $f:\Re^2\to\Re^2$ المعرف بالشكل:

$$f(x_1,x_2)=(x_1+x_2,x_1+x_2)$$

(iv) $f:\Re^3\to\Re^2$ المعرفة بالشكل:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2,x_2+x_3)$$

(v) $f:\Re^3\to\Re^3$ المعرف بالشكل:

$$f(x_1.x_2.x_3)=(2x_2+x_3,x_1-4x_2,3x_3)$$

14. أوجد تطبيقاً خطياً صورته تتولد بالمتجهات:

(1.2.3) ، (4.5.6) علماً بانه له الشكل:

$$f:\Re^3\to\Re^3$$

15. أوجد مصفوفة التطبيق الخطي $f:\Re^3\to\Re^3$ المعرف بالشكل:

$$f(x_1.x_2.x_3)=(x_1+3x_2\,,x_2-x_3\,,x_1+2x_2)$$

بالنسبة للأساس (القاعدة):

$$B_1=\{(1.0.0),(0.1.0),(0.0.1)\}$$

ثم بالنسبة للقاعدة:

$$B_2\{(1.1.1),(1.1.0),(1.0.0)\}$$

16. أوجد مصفوفة كلاً من التطبيقات الخطية التالية على $\Re^2$ للقاعدة (القانونية) النظامية:

(i) $f(x.y)=(2x-3y,x+y)$

(ii) $f(x.y)=5x+y,3x-2y)$

ثم بالنسبة للقاعدة: $B=\{(1.2),(2.3)\}$

17. ليكن V فضاء متجهياً فوق الحقل $\Re$ بحيث:

ولنفرض أن: $\dim = 3$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&7\\-1&2&3\\-1&3&10\end{bmatrix}$$

هي مصفوفة التطبيق الخطي $f:V\to V$ بالنسبة للقاعدة $B=\{x_1.x_2.x_3\}$ المطلوب:

أوجد مصفوفة هذا التطبيق بالنسبة للقاعدة $B_1=\{x_1'.x_2'.x_3'\}$ حيث أن:

$$x_1'=x_1\qquad,\qquad x_2'=x_1+x_2\qquad,\qquad x_3'=x_1+x_2+x_3$$

18. أوجد التطبيق الخطي الذي مصفوفته بالنسبة للقاعدة النظامية في $\Re^3$ هي:

$$\begin{bmatrix}2&-3&4\\5&-1&2\\4&7&0\end{bmatrix}$$

19. برهن نظرية (4.3.7)

20. أوجد القيم الذاتية، وقواعد الفضاءات الذاتية لكل من المصفوفات التالية:

$$A=\begin{bmatrix}3&1&1\\2&4&2\\1&1&3\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}1&2&2\\1&2&-1\\-1&1&4\end{bmatrix}\quad,\quad C=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

ثم أوجد:

$$P_3^{-1}CP_3 \quad . \quad P_2^{-1}BP_2 \quad . \quad P^{-1}AP_1$$

أيضاً كان ممكناً

بحيث تكون المصفوفة الناتجة قطرية.

21. برهن نظرية (4.3.5).

22. احسب معكوس المصفوفات التالية حسب مبرهنة تايلي هاملتون:

$$\begin{bmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1&-a&0\\0&1&-a\\0&0&1\end{bmatrix}\text{a}$$ عدد حقيقي

$$\begin{bmatrix}1&-a&0&0\\0&1&-a&0\\0&0&1&-a\\1&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$a,b,c\in\Re$$

الملاحق

ملحق (أ):

المجموعات (Sets):

إن أهم المفاهيم التي أخذتها العلوم من اللغة الدارجة كلمة مجموعة (Set)، ويعرف كل الناس ماذا نعني بقولنا مجموعة (مثلاً، مجموعة طلاب صف معين.. مجموعة منازل...) على هذا المفهوم البدائي البسيط قامت نظرية المجموعات، ثم تطور هذا المفهوم وأخذ تدريجياً شكلاً مجرداً يصعب تعريفه أحياناً، ويمكننا أن نعرف المجموعة بقولنا:

إن المجموعة أحياناً هي اجتماع كل، لعدد من الأشياء والتي نحسها بحزاسنا أو نتصورها بأذهاننا وهي كائنات معينة تمام التعيين، ومختلف بعضها عن بعض.

نرمز عادة للمجموعات بأحرف كبيرة.. A, B, C ولعناصرها بأحرف صغيرة ... a., b, c فلكي نبين أن a عنصر من المجموعة A نكتب $(a \in A)$ (a ينتمي إلى A) وهكذا..

إذا انتمى كل عنصر من A إلى المجموعة B أيضاً أي إذا كان $a \in A$ يقتضي $a \in B$ فإن A تسمى مجموعة جزئية من B، أو نقول أن A محتواه في B ونكتب ذلك بالشكل $B \supset A$ إن A=B إذا وفقط إذا كان $A \subset B$ ، $A \supset B$ بأن واحد.

إن تعيين المجموعة يتم بإدراج عناصرها أو بالنص على الخواص المميزة لعناصرها فمثلاً:

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ (الأعداد الزوجية من 2 حتى 10 ضمناً)

B= {a; a < 17 ، aعدد أولي }

إن المجموعة B هي مجموعة الأعداد الأولية التي تصغر 17.

العمليات على المجموعة:

لتكن B. A مجموعتين اختياريتين إن اجتماع (أو الاتحاد) (Union of sets) المجموعتين هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A أو إلى B ونرمز للإجتماع بـ

$A \cup B$ أمـــا تقاطع المجموعتين (Intersection of sets) B. A الذي نرمز له بـــ $A \cap B$ فهو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى B, A معاً.

إذا كـــانت B,A لا تحـــوي عناصر مشتركة فإن تقاطعها يساوي المجموعة الخالية والتي نرمز لها بـــ ϕ أي

$$A \cap B = \phi$$

لـــنفرض أن كل مجموعتين هي مجموعة جزئية من مجموعة كلية معينة U عندئذ تكون متممة المجموعة A التي ترمز لها بـــ A^c :

$$A^c = \{a \in U \quad ; \quad a \notin A\}$$

باختصار يمكن أن نقول أن المجموعات تحقق القوانين التالية:

(i) $A \cup A = A$ ، $A \cap A = A$

(ii) $(A \cap B \cap C = (B \cap A)$ ، $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(iii) $A \cap B = B \cap A$ ، $A \cup B = B \cup A$

(iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ، $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(v) $A \cap U = A, A \cap \phi = \phi$ (U المجموعة الكلية) $A \cup \phi = A \cup U = U$

(vi) $\phi^c = U$ ، $U^c = \phi$ ، $(A^c)^c = A$ ، $A \cap A^c = \phi$ ، $A \cup A^c = U$

(vii) قانونا دي مورجان $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ ، $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

بالإضافة إلى بعض الرموز التي يعرفها القارئ من المرحلة الدراسية الأولى.

تعاريف:

أ) الـــنظام الرياضي (A, *) (Groupoid) هو مجموعة غير خالية A معرف عليها قانون تشـــكيل داخلي (أو عملية ثنائية) (Binary operation) نرمز لها مثلاً بـــ * والتي هي عبارة عن دالة (Function):

$$* : A \times A \to A \quad ; \quad (X.Y) \to *(X.Y)$$

وهذا يمكن التعبير عن الصورة $\phi(X.Y)$ بالشكل $x*y$

ب) نصف الزمرة (* ,A) (Semigroup) وهو نظام رياضي تجميعي (Associative) أي:

$$\forall a,b,c \quad \in A; (a*b)*C = a*(b*c)$$

إذا كـــانت العمـــلية الثنائية المعرفة على المجموعة A هي عملية الضرب مثلاً أو الجمع فإننا نرمز لـــ x * y بـــ x .y أو (x + y للجمع) وندعو العلمية الثنائية بالضرب أو الجمع تجاوزاً.

ج) الزمرة (Group):

الزمـــرة (* .G) هـــي مجموعـــة غير خالية معرف فيما عملية ثنائية * بحيث أنه تتحقق الموضوعات (axiom) التالية:

(i) العملية الثنائية * تجميعية.

(ii) يوجد عنصر e في G بحيث أن:

e * a= a* e = a مهمـــا يكـــن a مـــن G هذا العنصر نسميه عنصراً محايداً لـــ *
(Identity element)

(iii) من أجل كل عنصر a من G يوجد عنصر a' من G بحيث أن:

$$a'*a = a*a' = e$$

إن العنصر a' نسميه نظير العنصر a بالنسبة لـــ** (invere of with respect to)

مثال:

إن مجموعة الأعداد الحقيقية معرف عليها عملية الجمع + هي زمرة.

تعـــريف: الزمرة G نسميها زمرة تبديلية (أو آبلية) (abelian) إذا كانت العملية الثنائية * المعرفة على G تبديلية بمعنى:

$$\forall a,b \in G \quad , \quad a*b = b*a$$

تعريف: نسمي المجموعة الجزئية H من G زمرة جزئية من G إذا كانت H نفسها

زمـــرة بالنسبة للعملية الثنائية المعرفة على G هذا وهناك تعاريف أخرى للزمرة الجزئية مكافئة لهذا التعريف.

تعريف الحلقة $(R , +, *)$ (Ring):

هي مجموعة R معرف عليها عمليتين ثنائيتين +، . نسميها عملية الجمع (addition) وعملية الضرب (miltipliction) بحيث تتحقق العلميات التالية:

(i) $(R, +)$ زمرة تبديلية.

(ii) عملية الضرب. تجميعية (العملية الثنائية الثانية تجميعية).

(iii) مهما يكن a, b, c من R فإن:

قانون التوزيع من اليسار (left distributer) $a(b + c)=a b +a c=$

قانون التوزيع من اليمين (right distributer) $(a + b)c = ac + bc$

مثال:

إن المجموعـــات التالية تشكل حلقات (مجموعة الأعداد الصحيحة، العادية الحقيقية المركبة).

$(Z, +, .)$, $(Q. +, .)$, $(R, +,.)$, $(C, +, .)$

تسمى الحلقة R تبديلية (Commutative ring)

كانت عملية الضرب فيها (أي العملية الثنائية الثانية) تبديلية

الحقل (The Field) (أو المجال):

تعريف:

الحقـــل $(F, +, .)$ هـــو مجموعة غير خالية F معرف عليها قانوناً تشكيل داخلي + بحيث:

(i) $(F, +)$ زمرة تبديلية.

(ii) $(F^*, .)$ زمرة تبديلية $F^* = F- \{0\}$

(iii) مهما يكن a, b, c من F فإن:

$$(a +b)\, c = ac +bc \quad ; \quad a(b + c) = a\, b +ac$$

إن المجموعات التالية مع العمليات الثنائية المرافقة لها تشكل حقلاً.

<Q, +, . >, R, +, . >, < C, +, . >

إن (Q, +, .) نسمية حقل الأعداد العادية (أو الكسرية).

، (R, +, .) نسميه حقل الأعداد الحقيقية.

، (C, +,) نسميه حقل الأعداد المركبة.

المراجع العلمية

1. في اللغة العربية:

أ) د. الهام حمصي الجبر (4) منشورات جامعة دمشق 1986.

ب) د. علي الخطيب الجبر الحديث منشورات جامعة حلب 1971.

ج) د. فوزي دنان، د. وليد عبد الحق.

د) د. نادر النادر، د. سمير سعد، مدخل إلى الجبر (2) منشورات جامعة حلب 1988.

هـ) أ. تورش: الجبر العالي، دار للطباعة والنشر والتوزيع الطبعة الرابعة 1988.

و) سلســلة ملخصــات شوم – الجبر الخطي – الدار الدولية للطباعة والتوزيع القاهرة 1990.

2. المراجع في اللغة الأجنبية:

I. B- Biaiyskic wstsp do obyebry limiowej, warszawa 1988.

II. A. mastowskie. A. Mosarek, Elementy algebra limiaes, warszawa 1965.

III. A. Mastowskie, algebra limiaon, warszawa 1965.

IV. N. Bourbaki. Group et de lie, Paris 1973.

V. A. Grevb. Linear algebra. Spanya varcly 2 ed. 1950.

VI. H. Anton. Elementary linear algebra 6^{th} edition. Drexel university. John. Willy. And sons INC. New York hi hestes Briebane, Toronto. Singapore1991

ملحق [ب]: المصطلحات العربية

إنكليزية – عربي

A	
Abelian	ابلي – تبديلي
Field	– حقل تبديلي
Addition	جمع
-of linear mapping	جمع التطبيقات الخطية
Algebra	الجبر
-of linear mapping	جبر التطبيقات الخطية
Algebra complements	متممات جبرية
- Operation	عملية جبرية
B	
Basis	قاعدة
-Changeuble	تغيير قاعدة
Big-ective linear mapping	تطبيق خطي تقابل
B-lock Matrix	مصفوفة مجزأة
C	
Cnenical	قانون
Homomorphism	تشاكل قانونيذ
Consistent of system of linear equations	جمـلة معادلات خطية مشتركة
Cramer's	قاعدة كرار
Cayle-Hamilton-theorem	مبرهنى كايلي هاملتون
Change of the basis	تغيير القاعدة
Coefficient	معامل
Columen matrix	مصفوفة عمود
Components	مركبات

- of avector	مركبات شعاع
D	
Definition	تعريف
Degree	درجة
Depedent vectors	أشعة مرتبطة
Determinant	محددة
- of matrix	محددة مصفوفة
- of th "n" th	محددة من الدرجة n
- of vandermonde	محددة فاند رموند
Diagonal	قطري
- matrix	مصفوفة قطرية
- of a matrix	قطر مصفوفة
Dimension	بعد – قياس
Direct sum	مجموع مباشر
Distributive law	قانون توزيعي
Domain of maping	منطقة تعريف تطبيق
Dual	ثنوي
- Basis	قاعدة ثنويه
- space	فضاء ثنوي
Group	زمرة
E	
Echelin linear equation	معادلات خطية متدرجة
- Matrix	مصفوفة متدرجة

Elements	عنصر
Elementary	أملي
- Trans formation	تحويلات أولية
Elimination	صنف
Equality	مساواة
- of matrxes	تساوي المصفوفات
Equation	معادلة
Equivalent Relation	علاقة تكافؤ
Equivalent matrixes	مصفوفة تكافؤ
Even	زوجي
Expansion of determinant	نشر محددة

F

Factor	عامل
Field	حقل
Form	شكل
Function	تابع

H

Hermetian martix	مصفوفة هرمتية
Humogeneous linear caueions	معادلات خطية متجانسة
Homomorphism	تشاكل
- of vector spaces	تشاكل فضاء شعاعي

I

Idntity	واحدة
- element	عنصر الواحدة
- matrix	تطبيق واحدة
- matrix	مصفوفة الواحدة
- permulation	
Image	صورة مباشرة
Inconsis tent system of linear equation	جملة معادلات خطية غير مشتركة
Independent vectors	أشعة مستقلة
Injective mapping	تطبيق تبادلي
Intersection	تقاطع
Inverse	معكوس

G

Gauss	جاوس
- Nethod	طريقة جاوس
General	عام
Generate	يولد
Greater than	أكبر من
Kernel	نواة
- of Homomorphism	نواة التشاكل
Kroncher-Cappeli Thear	
-of alinear mapping	معكوس تطبيق خطي
- of amatrix	معكوس مصفوفة
Invertible	قابل للعكس
Esomorphism	ايزومورفيزم
-of avector spaces	ايزومرفيزم فضاء شعاعي

L

Linear	خطي
- Dependence	ارتباط خطي
- Equation	معادلات خطية
- Indepentence	استقلال
- mapping	تطبيق خطي

M

Mapping	تطبيق
Mathematical induction	استقراء رياضي
Matrix	مصفوفات
Mimor	صغير
Multiplication of matrices	ضرب المصفوفات
- of ordes k	صغير من المرتبة k
- of amatrix by a scalar	ضرب مصفوفة بمقدار سلمي

المحتويات

الجبر الخطي

تنفيذ ـ دار الأنيس
مصراتة ـ الجماهيرية العظمى
هاتف: 614592 _ 614593 _ 51 _ 00218