مقدمة في

تبولوجيا الأعداد

تاليف

د. أمير عبد المجيد الخواجة
أستاذ مساعد في الرياضيات
كلية العلوم/ جامعة سرت

أ. محمد محمد ادريس
محاضر في الرياضيات
كلية العلوم/ جامعة سرت

منشورات
جامعة سرت
سرت ـ الجماهيرية العظمى

مقدمة في

تبولوجيا الأعداد

مقدمة في

تبولوجيا الأعداد

تاليف

د. أمير عبد المجيد الخواجة

أستاذ مساعد في الرياضيات

كلية العلوم/ جامعة سرت

أ. محمد محمد إدريس

محاضر في الرياضيات

كلية العلوم/ جامعة سرت

منشورات

جامعة سرت

سرت – الجماهيرية العظمى

اسم الكتاب: مقدمة في تبولوجيا الأعداد

تأليف: د. أمير عبد المجيد الخواجة - أ. محمد محمد إدريس

الطبعة الأولى: 2009

الترقيم الدولي: ردمك 978-9959-891-07-5 I.S.B.N

رقم الإيداع: 995

[الوكالة الليبية للترقيم الدولي الموحد للكتاب]

دار الكتب الوطنية

بنغازي - ليبيا

هاتف: 9090509 - 9096379 - 9097074 61 (218+)

بريد مصور: 9097073 61 (218+)

البريد الإلكتروني: nat_lib_libya@hotmail.com

جامعة سرت

سرت/ الجماهيرية العظمى

ص. ب 674، سرت - ليبيا

هاتف: 5260363 - 54 (218+)

فاكس: 5262152 - 54 (218+)

البريد الإلكتروني: info@su.edu.ly

الموقع الإلكتروني: www.su.edu.ly

المحتويات

المقدمة

أن بداية علم التبولوجيا ترجع إلى عام 1860 ف عندما حلل فير ستراس (Weierstrass) مفهوم غاية الدوال (التطبيقات) العددية وفي سياق هذا التحليل إعادة بناء فضاء الأعداد الحقيقية وإبراز خواصها التي يطلق عليها «بالخواص التبولوجية» وعلى ضوء هذا أستحدث كنتور (Cantor) عام 1873 ف لغة جديدة تتسم بالعمومية والدقة في التعبير عن هذه الخواص وأطلق عليها المجموعات . لقد ساعد ذلك كل من اسكولي (Acoli) وفولتيرا (Volterra) وارزيلا (Arzela) لتمهيد الطريق أمام فريشيه (Frechet) عام «1906 ف» إلى اكتشاف ما يسمى اليوم بالفضاءات المترية ، والتي ليست هي إلا مجموعة مزودة بدالة مترية (مسافية)، ومن خلال هذه الفضاءات المترية، لاحظ هاوزدورف (Hausdorff) أن دالة المسافة ليست ضرورية للتعبير عن الوصف الدقيق لعناصر الفضاءات حيث يمكن إحلالها بالجوارات أو المجموعات المفتوحة، وغدت لغة التبولوجيا التي يعد جانباً منها تجريداً وتعميماً للحقائق المعروفة في الفضاءات المترية.

وبعون من الله وتوفيقه يسرنا أن نقدم هذا الكتاب (مقدمة في تبولوجيا الأعداد) إلى الطالب العربي مساهمة منا في إنجاح برنامج تعريب المقررات الدراسية بالجامعات وتسهيلاً للفهم والاستيعاب لدى طلاب الجامعات والمعاهد العليا.

وعند تأليف الكتاب أخذنا بنظر الاعتبار بان الطالب قد تعلم من دراسته السابقة في مواضيع الجبر وأسس الرياضيات للسنة الأولى كيفية إنشاء نظام الأعداد الحقيقية انشاءً دقيقاً متدرجاً وذلك بقبول بعض المسلمات التي تخص مجموعة الأعداد الطبيعية (N) والاعتماد عليها وعلى بعض المبرهنات لإنشاء الأعداد الصحيحة (Z) وبعد ذلك إنشاء الأعداد النسبية (Q) منتهين بنظام الأعداد الحقيقية (R).

ويمكن أن يكون هذا الكتاب منهجاً دراسيا مناسباً لطلبة السنة الثانية أو الثالثة لكليات العلوم أو التربية وكذلك المعاهد العليا وقد حرصنا على إبراز المفاهيم الأساسية معززة بالأمثلة مع كتابة أكثر من طريقة واحدة في برهان بعض المبرهنات الصعبة وذلك لتسهيل عملية الفهم لدى الطلبة.

ويتألف الكتاب من أربعة أبواب هي:-

الباب الأول :- وقد تطرق إلى موضوع نظام الأعداد الحقيقية من حيث ترتيب مجموعة الأعداد الحقيقية والقيم المطلقة والمجموعات المحدودة ثم مسلمة الكمال للأعداد الحقيقية .

الباب الثاني:- فقد تطرق إلى موضوع جوار النقطة ثم المجموعات المفتوحة والمغلقة وخواصها واهم مبرهنات ها ثم تناول التبولوجيا على المجموعة (R) والفضاء التبولوجي.

الباب الثالث :- فقد تطرق إلى المجموعات المرصوصة وابرز سماتها ومبرهنات ها وقد أبرزت الخواص التبولوجيا لمجموعة الأعداد الحقيقية من خلال الوصف وجدت تلك الخواص لأجل تعريف الفضاء التبولوجي بشكل عام والفضاء المتري بشكل خاص.

الباب الرابع :- فقد تطرق إلى المتابعات والدوال العددية في حقل الأعداد الحقيقية وفي الفضاء المتري تناول الفضاء المتكامل ولقد روعي في الوصف التسلسل المنطقي في تبويب محتويات الكتاب . آملين أن يسد هذا الجهد المتواضع بعض حاجة طلابنا الأعزاء وزملائنا الأفاضل و يجد له مكاناً في المكتبة العربية . والله الموفق..

المؤلفان

د. أمير عبدا لمجيد الخواجة

أ . محمد محمد ادريس

الباب الأول

System of Numbers نظام الأعداد

1-1 ترتيب الأعداد الحقيقية

Ordering Of Real Numbers

سوف نقوم في هذا الباب بدراسة الأعداد الحقيقية (R) ومن دراستنا السابقة لمواضيع الرياضيات للسنة الأولى قد تعلمنا كيفية انشاء نظام الأعداد الحقيقية إنشاءً دقيقاً ولذا سوف نكتفي بقبول بعض خواص الأعداد الحقيقية كمسلمات ونستفيد من التطبيق المباشر لهذه الخواص فقط.

1.1.1 مسلمة الحقل المرتب Ordered Field Axiom

((الأعداد الحقيقية حقل مرتب))

ويعني ذلك انه لكل $x , y \in R$ يكون $x . y \in R$ و $x+y \in R$

وان عملية الجمع وعملية الضرب تحققان الخواص التالية :-

(1) التبديل Commutative

$$\left.\begin{aligned} x+y &= y+x \\ x.y &= y.x \end{aligned}\right\} \quad \forall\ x , y , z \in R$$

(2) التجميع Associative

$$\left.\begin{aligned} (x+y)+z &= x+(y+z) \\ (x.y).z &= x.(y.z) \end{aligned}\right\} \quad \forall\ x , y , z \in R$$

(3) التوزيع Distributive

$$x . (y+z) = x . y + x . z \qquad \forall\ x, y ,z \in R$$

(4) العناصر المحايدة للجمع والضرب Identity Elementes

يوجد عنصران مختلفان هما (0) و(1) ينتميان إلى R بحيث:-

$$\left.\begin{aligned} x + 0 &= x \\ x . 1 &= x \end{aligned}\right\} \quad \forall\ x \in R$$

(5) النظائر الجمعية والضربية Inverse Elements

(i) لكل $x \in R$ يوجد $y \in R$ بحيث :

$$x + y = 0$$

يسمى y النظير الجمعي للعدد x ويكتب أحيانا $(-x)$

(ii) لكل $x \in R$ حيث $x \neq 0$ يوجد $y \in R$ بحيث :

$$x \cdot y = 1$$

يسمى y النظير الضربي للعدد x ويكتب أحيانا x^{-1} أو $\frac{1}{x}$

سوف نترك للطالب استنباط بعض الحقائق مثل وحدانية العناصر المحايدة ووحدانية النظائر الجمعية والضربية وغيرها .

ومن المفاهيم التي سنحتاج إليهما مفهوم الترتيب على مجموعة الأعداد الحقيقية وهذا يقتضي وجود مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية سنرمز إليها بالرمز p ونسميها بمجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة وهي تحقق الشروط التالية:-

(6) لكل $x, y \in p$ يكون :-

$$x + y \in p \quad , \quad x \cdot y \in p$$

(7) لكل $x \in p$ واحدة فقط مم يأتي تكون صحيحة

(i) $x \in p$

(ii) $-x \in p$

(iii) $x = 0$

ستساعدنا المجموعة p وخاصتاها (6) و (7) في تعريف الترتيب على R

2.1.1 تعريف:

نقول أن x اصغر من y ونكتب $x < y$ إذا وفقط إذا كان

$y - x \in p$ حيث $x , y \in p$.

ويقال أيضا أن y اكبر من x .

ومن التعريف أعلاه نستنتج ما يلي :

(1) أن $x \in p$ يعني أن $x - 0 \in p$ وهذا يؤدي إلى أن $x > 0$ وعلى هذا الأساس يمكن كتابة عناصر المجموعة p بالشكل:-

$$p = \{ x : x \in R , x > 0 \}$$

وتسمى p مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة Positive Reals

(2) إذا كان $(- x) \in p$ فان $0 - x \in p$ وهذا يؤدي إلى أن $x < 0$ سنسمي مثل هذه العناصر أعداد سالبة وستكون المجموعة $-p = \{ x : - x \in p \}$

تمثل مجموعة الأعداد السالبة Negative Reals

(3) أن $R = P \cup (-P) \cup \{0\}$

(4) لكل $x , y \in R$ واحدة وواحدة فقط في العلاقات الآتية تكون صحيحة :

أ- $x < y$

ب- $y < x$

ج- $x = y$

هذه النتيجة يمكن استخلاصها من الخاصية (7) أعلاه حيث يكون إما :

$x - y \in p$ أو $y - x \in p$ أو $x - y = 0$

(5) إذا كان $x \le y$ فإنها تعني إما $x < y$ أو $x = y$

ومن النتائج المفيدة لعلاقة الترتيب المبرهنات الآتية :-

مبرهنة 3.1.1 :

إذا كان $x , y \in R$ بحيث $x < y$ و $y < z$ فان $x < z$

البرهان:-

لما كان $x < y$ لذا فان $(y - x) \in p$ ، ولما كان $y < z$ لذا فان $(z - y) \in p$ ، و حيث أن

$$z - x = (z - y) + (y - x)$$

لذلك يكون $z - x \in p$ بالاستناد إلى الخاصية (6) ومن التعريف (2.1.1) نحصل على $x < z$.

مبرهنة 4.1.1 :

إذا كان $x , y , z \in p$ وكان $x < y$ فان :

$$x + z < y + z$$

البرهان :-

لما كان $x < y$ لذا فان $y - x \in p$

وحيث أن

$$y - x = (y + z) - (x + z)$$

ومنها يكون

$$(y + z) - (x + z) \in p$$

ومنه ينتج

$x + z < y + z$

مبرهنة : 5.1.1

إذا كان $x , y , z \in p$ بحيث :

(1) $x < y$ و $z > o$ فان $x z < y z$

(2) $x < y$ و $z < 0$ فان $x z > y z$

البرهان :-

(1) حيث أن $x < y$ لذا فان $y - x \in p$ وبما أن $z > 0$ لذا فان $z \in p$

ومن الخاصية (6) يكون

$z \cdot (y - x) \in p$

ومن الخاصية (3) نعلم أن :

$z . (y - x) = z y - z x \quad \in p$

ومنه ينتج $x z < y z$

(2) يترك كتمرين للطالب

تلميح للحل : لاحظ انه لما كان $x < y$ فان $y - x \in p$

وحيث أن $z < 0$ لذا فان $- z \in p$ - ثم أستخدام الخاصية (6) لإكمال الحل.

2.1 القيمة المطلقة والمجموعات المحدودة
Absolute Value and Bounded Sets

فيما يلي ستكون مجموعتنا الشاملة هي مجموعة الأعداد الحقيقية، إلا إذ ذكر خلاف ذلك. وسنستفيد من كون R حقلاً مرتباً في تعريف المجموعات الجزئية في تعريف الأعداد الحقيقية المحدودة (Bounded) وغير المحدودة (Unbounded) فلو درسنا كلاً من المجموعتين

$$B = \{-1,-2,-3,\ldots\} \text{ و } A = \{1,2,3,\ldots\}$$

لرأينا أن العدد (1) في المجموعة A هو أصغر العناصر جميعاً ، وأن العدد (1-) هو أكبر العناصر في المجموعة B ونستطيع القول كذلك بأن الصفر والأعداد 1- ، 2- ، 3- هي أعداد أصغر من كل العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A فكل منها ((يحد)) المجموعة A من الأسفل ، وأن الأعداد صفر، 1 ، 2 ، 3، 4 هي أعداد وكل منها اكبر من كل عنصر من عناصر B ، فكل منها ((يحد)) المجموعة B من الأعلى .

مما سبق سنستخدم التعريف التالي :-

1.2.1 تعريف :

يقال للعدد الحقيقي M بأنه حد أعلى للمجموعة A (Upper Bound) إذا كان $x \le M$ لكل $x \in A$.

2.2.1 مثال :

لتكن $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ نلاحظ أن العدد (1) اكبر من أو يساوي أي عنصر من عناصر المجموعة لذا فهو حد أعلى لها، أما الأعداد 2 ، 3 أو أي

عدد آخر أكبر من الواحد يكون حد أعلى للمجموعة A باعتباره أكبر من أي عنصر من عناصرها.

3.2.1 تعريف :

يقال للعدد الحقيقي M بأنه حد أدنى للمجموعة A (Lower Bound) إذا كان $x \ge M$ لكل $x \in A$.

4.2.1 مثال :

لتكن $A = \{ x : 2 < x < 3 \}$ نلاحظ أن العدد 2 أصغر من كل عنصر من المجموعة A ، لذا فهو حد أدنى لها وأن العدد 3 أكبر من كل عنصر من عناصر المجموعة A لذا فهو حد أعلى وأن الحد الأعلى (أو الأدنى) لا يشترط أن ينتمي إلى المجموعة مثل العدد 3 والعدد 2 لا ينتميان إلى المجموعة A .

5.2.1 تعريف :

لتكن $A \subset R$ ، يقال للمجموعة A إنها محدودة من الأعلى (bounded above) إذا كان لها حد أعلى ومحدودة من الأسفل (bounded Below) إذا كان لها حد أدنى

6.2.1 مثال :

لتكن $A = \{ 1 , \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \}$ نلاحظ أن (1) حد أعلى للمجموعة A فهي إذن محدودة من الأعلى . وأن الصفر أصغر من كل عنصر من عناصرها . لذا فهو حد أدنى لها . فهي إذن محدودة من الأسفل .

7.2.1 تعريف:
يقال للمجموعة إنها محدودة (Bounded) إذ و فقط إذ وكانت محدودة من الأعلى ومن الأسفل.

8.2.1 مثال:

لتكن $A = \{ 1 , \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4} , \frac{1}{4}, ... \}$ نلاحظ أن المجموعة محدودة من الأعلى بالعدد (1) أو محدودة من الأسفل بالعدد صفر، لذا فهي محدودة.

9.2.1 مثال:

لتكن $A = \{ 1 , 2 ,3 ,4 \}$ نلاحظ أنها محدودة من الأعلى بالعدد 4 ومحدودة من الأسفل بالعدد 1، وأن كل الحدين ينتمي إلى A.

من الجدير بالملاحظة إن كل مجموعة منتهية من الأعداد، تكون مجموعة محدودة وإن حدها الأعلى هو أكبر عناصرها وحدها الأدنى هو أصغر عناصرها وأنهما أي أكبر وأصغر عناصرها ينتميان إلى المجموعة نفسها.

10.2.1 مثال:

لتكن $A = \{1 , -1 ,2 ,-2 , 3 ,-3 ,.......\}$ نجد أن A غير محدودة من الأعلى لأننا نستطيع إيجاد عدد طبيعي n يكون أكبر من أي عدد حقيقي نختاره وكذلك فالمجموعة ليست محدودة من الأسفل لأننا نستطيع إيجاد عدد صحيح سالب أصغر من أي عدد حقيقي نختاره.

11.2.1 تعريف:

نقول أن المجموعة A غير محدود من الأعلى إذا تحقق الأتي:

لكل $M \in R$ يوجد $x \in A$ بحيث أن $x \geq M$ ، وبالمثل تكون المجموعة B غير محدودة من الأسفل إذا تحقق الأتي:

لكل $m \in R$ يوجد $x \in B$ بحيث $x \leq m$.

في المثال (10.2.1) مجموعة A غير محدودة من الأعلى ومن الأسفل كذلك.

12.2.1 مثال:

لتكن $A = \{x : x < 1\}$ ، نلاحظ أن العدد (1) أو عدد أخر أكبر منه هو حد أعلى للمجموعة A، وأنها غير محدودة من الأسفل، لأن أي عدد مثل m نختاره، سيكون أما $m \in A$ وفي هذه الحالة يكون العدد $m-1 < m$ وكذلك $m-1 < 1$ أي أن $m-1 \in A$ و $m-1 < m$

أما إذا كان $m \notin A$ فهو في هذه الحالة حد أعلى للمجموعة A ، لاحظ أن العدد (1) هو اصغر الحدود العليا، وأنه لا ينتمي إلى المجموعة A .

13.2.1 تعريف:

القيمة المطلقة (Absolute Value) للعدد x، ويرمز لها $|x|$ تعرف كما يلي:

$$|x| = \begin{cases} x & if \quad x \geq 0 \\ -x & if \quad x < 0 \end{cases}$$

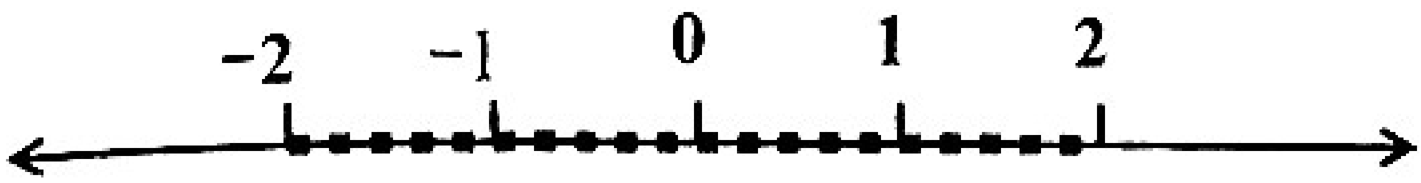
مثال: 14.2.1

$$\frac{7}{2}=\left|-\frac{7}{2}\right|,\ \sqrt{2}=\left|-\sqrt{2}\right|,\ 3=|-3|$$

وهذا يعني أن القيمة المطلقة للعدد هي قيمته العددية بغض النظر عن إشــارته، باللغة الهندسية، $|x|$ يعني أن النقطة تبعد بمقدار x عن نقطة الأصل دون الاهتمــام إلى كون النقطة يمين أو يسار نقطة الأصل.

مثال: 15.2.1

لتكن $A=\{x:|x|<2\}$ لأجل تمثيل A على خط الأعداد، نجد أنها تمثــل بكل x أي تبعد عن نقطة الأصل بأقل من 2 وحدة.



ولهذا يمكن كتابتها بالصورة:

$$A=\{x:-2<x<2\}$$

بصورة عامة يمكن كتابة المجموعة $\{x:|x|<c\}$ لأي $c>0$ بالشكل $\{x:-c<x<c\}$.

ويمكن كتابة المجموعة $A=\{x:|x-3|<2\}$ بالشكل:

$$\begin{aligned}A&=\{x:-2<x-3<2\}\\&=\{x:3-2<x<2+3\}\\&=\{x:1<x<5\}\end{aligned}$$

وبصورة عامة إذا كان $b>0$ وكان $a\in R$ فأن المجموعة

$$A=\{x:|x-a|<b\}$$

يمكن أن تكتب بالصورة:

$$A = \{x : a - b < x < a + b\}$$

16.2.1 ملاحظات:

من تعريف القيم المطلق نستنتج ما يأتي:

(1) $|-a| = a$

(2) $|-a| \le a \le |a|$

(3) $|a|^2 = a^2$

17.2.1 مبرهنة:

لكل $x , y \in R$ يكون:

(1) $|x + y| \le |x| + |y|$

(2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(3) $|x| - |y| \le \big|\, |x| - |y| \,\big| \le |x - y|$

البرهان:-

(1) ليكن: $x \le |x|$, $y \le |y|$

ومنه يكون

$$x + y \le |x| + |y| \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

كذلك نعلم أن: $-x \le |x|$, $-y \le |y|$

ومنه يكون

$$-x-y \le |x|+|y|$$

إذن

$$-\left(|x|+|y|\right) \le x+y \quad \text{......................} \quad \text{(ii)}$$

من (i) و(ii) نستنتج أن:

$$-\left(|x|+|y|\right) \le x+y \le \left(|x|+|y|\right)$$

أو

$$|x+y| \le |x|+|y|$$

(2) ليكن:

$$|x \cdot y|^2 = (x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2 = |x|^2 \cdot |y|^2$$

إذن

$$|x \cdot y|^2 = |x|^2 \cdot |y|^2$$

إذن

$$\left(|x \cdot y|\right)^2 = \left(|x| \cdot |y|\right)^2$$

إذن

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

وعندما $x=-1$ يكون:

$$|(-1) \cdot y| = |-1| \cdot |y|$$

إذن

$$|-y| = |y|$$

(3) نكتب:

$$x = (x - y) + y$$

لذلك يكون $|x| = |(x - y) + y|$ من الفرع (1) يكون:

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |(x - y)| + |y|$$

إذن

$$|x| \leq |x - y| + |y|$$

إذن

$$|x| - |y| \leq |x - y| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

ونستطيع أن نكتب:

$$y = x - (x - y)$$

إذن

$$|y| = |x - (x - y)| \leq |x| + |-(x - y)|$$

$$|y| \leq |x| + |x - y|$$

$$|y| - |x| \leq |x - y| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

$$-|x - y| \leq |x| - |y|$$

من (i) و(ii) يكون

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$$

إذن

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$$

إذن

$$|x| - |y| \leq \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$$

وبهذا يتم البرهان لجميع نوع المبرهنة.

3.1 مسلمة الكمال Completeness Axiom

1.3.1 مثال:

لتكن $A = \{x : 0 < x < 1\}$ المجموعة A مجموعة محدودة من الأعلى بكل من الأعداد 1 ، 2 ، 3 ...... وأعداد أخرى.

هل تمتلك مجموعة الحدود العليا حدا أصغر؟

الجواب: نعم، فالعدد (1) هو أصغر الحدود العليا كما نلاحظ، وهو ليس عنصرا من عناصر A، والصفر هو حد أدنى للمجموعة A، وكل عدد حقيقي أصغر منه يصلح أن يكون حدا أدنى لها، فالصفر إذن أكبر حد أدنى للمجموعة A.

يوحي المثال (1.3.1) بالتعريفين..

وبالمثل يمكن تعريف أكبر حد أدنى للمجموعة كالآتي:

2.3.1 تعريف :

يقال للعدد الحقيقي b بأنه أصغر حد أعلى للمجموعة A ، (Least Upper Bound) إذ تحقق الشرطان الآتيان:

(1) b هو حد أعلى للمجموعة A

(2) إذ كان c حد أعلى للمجموعة A فان $b \le c$

3.3.1 تعريف:

يقال للعدد a بأنه أكبر حد أدنى للمجموعة A، (Greatest Lower Bound)
إذا تحقق الشرطان الآتيان:

(1) a هو حد أدنى للمجموعة A

(2) إذ كان c حد أدنى للمجموعة A فان $a \geq c$

4.3.1 مثال:-

لتكن $A = \{2، 4، 8، 10\}$، نلاحظ أن 2 هو أصغر عناصر المجموعة A وهو أكبر حد أدنى لها وان العدد 10 هو أكبر عناصر المجموعة A وهو أصغر حد أعلى لها. ومن هذا المثال يمكن القول بان المجموعات المنتهية تمتلك حدا أعلى وحدا أدنى وكل منها ينتمي إلى A.

5.3.1 مسلمة الكمال (Completeness Axiom)

إذا كانت A مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية وكانت محدودة من الأعلى، فأنها تمتلك أصغر حد أعلى.

وكما مر في الأمثلة السابقة فإنه لا يشترط أن يكون الحد الأعلى الأصغر عنصر في المجموعة نفسها.

6.3.1 ملاحظة:

إذا كانت A مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية ووجد عدد حقيقي $M>0$ بحيث $|x| \leq M$ لكل $x \in A$ فان المجموعة A تكون محدودة من الأعلى

بالعدد M، ومن الأسفل بالعدد $-M$، لان $-M \le x \le M$ حيث $x \in A$ وكذلك تمتلك المجموعة A اكبر حد أدنى واصغر حد أعلى.

اما إذا كانت المجموعة A محدودة، فهذا يعني وجود عددين حقيقيين M و m بحيث أن $m \le x \le M$ لكل $x \in A$. ولو فرضنا أن K لا يساوي اكبر العددين $|m|$، $|M|$ يكون $|x| \le k$ لماذا ؟

لما سبق نتوصل إلي النتيجة التالية:

7.3.1 نتيجة:

تكون المجموعة A محدودة إذا فقط إذ وجد عدد حقيقي مثل m بحيث أن $m \ge 0$ و $|x| \le m$.

8.3.1 ملاحظة:

بالاعتماد على بديهية الكمال للأعداد الحقيقة يمكن الاستنتاج بان المجموعة الجزئية من الأعداد الحقيقية المحدودة من الأسفل تمتلك اكبر حد أدنى ، ولا يشترط أن ينتمي إلى المجموعة نفسها.

9.3.1 مبرهنة:
أصغر حد أعلى لمجموعة محدودة من الأعلى يكون وحيداً.

البرهان:

إذ كان كل من U_1، U_2 حداً أعلى للمجموعة A ، سيكون $U_1 \le U_2$، $U_2 \le U_1$ وهذا يؤدي ألي $U_1 = U_2$. يمكن البرهنة على المبرهنة السابقة (9.3.1) في حالة كونها محدودة من الأسفل.

10.3.1 مبرهنة:

إذا كان U اصغر حد أعلى للمجموعة A وكان $\varepsilon > 0$ (حيث ε أي عدد حقيقي)، فأنة يوجد $x \in A$ بحيث أن $x > U - \varepsilon$.

البرهان:

ليكن U اصغر حد أعلى للمجموعة A، وليكن ε عدد حقيقي موجب فإذا لم نستطيع إيجاد عدد مثل x ينتمي إلي A بحيث يكون $x > U - \varepsilon$ معنى ذلك أن كل عناصر A تكون اصغر من أو تساوي $U - \varepsilon$ أي $x \le U - \varepsilon$ وهذا يعني إن العدد $U - \varepsilon$ هو حدأعلى للمجموعة A وهذا يناقض الفرض بان U هو اصغر حد أعلى للمجموعة A ولذلك لابد من وجود $x \in A$ بحيث

$$x > U - \varepsilon.$$

سوف نذكر بعض الحقائق دون الخوض في برهانها:

11.3.1 حقيقة:

إذا كان b,a عددين حقيقيين فان عدد نسبيا مثل c يكون موجودا بحيث $a<c<b$ ويوجد عدد غير نسبي مثل d بحيث $a < d < b$.

12.3.1 حقيقة:

لكل عدد حقيقي موجب ε يوجد عدد طبيعي m بحيث $\frac{1}{m} < \varepsilon$

4.1 تمارين

(1) برهن على إن النظير الجمعي لأي عنصر في R هو عنصر وحيد.

(2) برهن علي إن النظير ألضربي لأي عنصر في $R/\{0\}$ هو عنصر وحيد

(3) برهن على أن المحايد الجمعي 0 هو عنصر وحيد .

(4) برهن على انه إذا كان $x\,z = y\,z$ فان $x = y$ والعكس .

حيث $x , y , z \in R$ وان $z \neq 0$.

(5) برهن على انه إذا كان $x > 0$ فان $\frac{1}{x} > 0$.

(6) إذا كان $y \neq 0$ فبرهن على أن

$$\left| -\frac{1}{y} \right| = \left| \frac{1}{y} \right|$$

(7) لكل $x , y , z \in R$ اثبت أن $|x - y| \leq |x - z| + |y - z|$

(8) اثبت أن $a . b \leq |a| . |b|$ لكل $a , b \in R$

(9) اكتب بدون استخدام رمز القيمة المطلقة كل مجموعة من المجموعات الآتية :

$$A = \{ x : |x-2| \leq 1 \} \quad ،$$

$$B = \{ x : 0 < |x-2| \leq 1 \} \quad ،$$

$$C = \{ x : |x-3| \geq 2 \}$$

(10) إذا كانت A مجموعة غير خالية وكانت المجموعة B معرفة كالأتي :

$$B = \{ x : -x \in A \}$$

فبرهن على:

(i) أن c يكون حداً أدنى للمجموعة A إذا وفقط إذا كان (-c) حداً أعلى للمجموعة B .

(ii) أن d حداً أعلى للمجموعة A إذا وفقط إذا كان (-b) حداً أدنى للمجموعة B .

(iii) أن A محدودة إذا وفقط إذا كانت B محدودة .

(11) برهن على أن المجموعة المنتهية لا يمكن أن تملك إلا اصغر حد أعلى واحداً واكبر حد أدنى واحدا وكليهما ينتميان إليها .

(12) برهن أن اتحاد مجموعتين محدودتين يكون مجموعة محدودة .

(13) برهن على انه إذا كانت المجموعة A محدودة فيوجد عدد حقيقي مثل k بحيث أن $k > 0$ ويحقق العلاقة :

$$|x - y| \le k \qquad \forall \ x, y \in A$$

الباب الثانـي

Topology of Real Numbers تبولوجيا الأعداد الحقيقية

1.2 جوار النقطة Neighborhood of A Point

سنحاول في هذا الباب التعرض إلى بعض خواص مجموعات من الأعداد الحقيقية، مثل المجموعات المغلقة والمفتوحة وتقاطع واتحاد المجموعات من هذا النوع، لأن في ذلك أهمية بالغة في التعرف على مفاهيم في غاية الأهمية مثل مفهوم الجوار، والغاية والاستمرار للدوال الحقيقية ، وسنبدأ بتقديم بعض التعاريف البسيطة .

1.1.2 تعريف

تسمى المجموعة $\{x : a < x < b\}$ حيث $a , b \in R$ بالفترة المفتوحة (Open Interval) وتكتب (a , b) وتعرف النقطتان a . b بنهايتي الفترة (End points of the Interval) أي أن :

$$(a , b) = \{x : a < x < b , \forall x \in R ، a , b \in R \}$$

لاحظ أن نقطتي النهاية للفترة المفتوحة لاتنتميان إلى الفترة .

2.1.2 تعريف :

تسمى المجموعة $\{x : a \le x \le b\}$ حيث $a , b \in R$ بالفترة المغلقة (Closed Interval) وتكتب $[a , b]$ أي أن:

$$[a , b] = \{x : a \le x \le b, \forall x \in R ، a , b \in R \}$$

وتعرف النقطتان a , b بنقطتي النهاية للفترة المغلقة وهي كما نلاحظ ضمن نقاط الفترة.

أما المجموعات من النوع $[a,b)= \{x : a \le x < b\}$

$(a,b]= \{x : a < x \le b\}$

فتسمى بالمجموعات النصف مفتوحه (halve open).

أما المجموعات من النوع $\{ x : x \in R , x < a \}$ تسمى بالشعاع المفتوح (Open Ray) ، وأما المجموعة $\{ x : x \in R , x \le a\}$ تعرف بالشعاع المغلق (Closed Ray) .

3.1.2 ملاحظة :

سنصطلح على تسمية الفترات المفتوحة والمغلقة والأشعة المفتوحة والمغلقة (بفترات الأعداد الحقيقية).

كثيراً ما نتكلم عن مجموعة من النقاط ونصفها بأنها قريبة جداً من نقطة ما ، فمثلاً نقول أن النقاط التي تقع في جوار النقطة واحد هي نقاط قريبة من النقطة واحد. هذا كلام يثير بعض التساؤلات، فمثلاً كم تكون درجة القرب من النقطة المعلومة ؟ ما معنى جوار النقطة ؟ كل هذه الأسئلة تجيب عنها التعاريف الآتية :

4.1.2 تعريف:

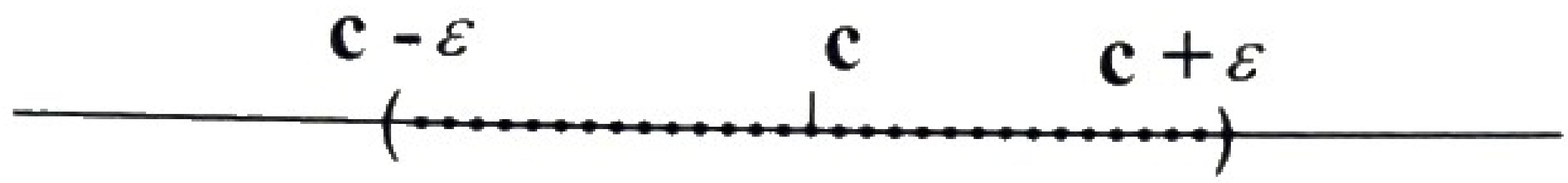
لتكن $c \in R$ وليكن $\varepsilon > 0$ عدداً حقيقياً موجبا ، فالفترة المفتوحة $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ تسمى جوار (Neighborhood) للنقطة (c)

يسمى العدد (ε) بنصف قطر هذا الجوار .

يرمز عادة لجوار النقطة c بالرمز $N (c , \varepsilon)$ ولذا يكون :

$$N(c , \varepsilon) = (c -\varepsilon , c+\varepsilon) = \{ x : c - \varepsilon < x < c+ \varepsilon \}$$

من الواضح أن النقطة (c) تمثل منتصف الفترة المفتوحة كما في الشكل المجاور :



لاحظ أن الشكل $x \in N(c,\ \varepsilon)$ يحقق المتباينة :

$$c - \varepsilon < x < c + \varepsilon$$

بطرح (c) من طرفي المتباينة نحصل على:

$$-\varepsilon < x - c < \varepsilon$$

ومن تعريف القيمة المطلقة نحصل على :

$$|x - c| < \varepsilon$$

ولذلك يكون $x \in N(c,\ \varepsilon)$ إذا وفقط إذا كان $|x - c| < \varepsilon$

أو :

$$N(c,\ \varepsilon) = \{x : |x - c| < \varepsilon\}$$

سنبرهن فيما يلي بعض النظريات التي تتعلق بجوار النقطة .

5.1.2 مبرهنة :

لكل $a \in N(c, \varepsilon)$ **يوجد** $\varepsilon' > 0$ **بحيث**

$N(a, \varepsilon') \subset N(c, \varepsilon)$.

البرهان:

لما كان $a \in N(c,\ \varepsilon)$ لـذلك فـإن $|a - c| < \varepsilon$ وعليـه يكـون $\varepsilon - |a - c| > 0$. دعنا نفرض أن $\varepsilon' = \varepsilon - |a - c|$

إذن $\varepsilon' > 0$ و $\varepsilon - \varepsilon' = |a - c|$

علينا الآن أن نبرهن أن $N(a, \varepsilon') \subset N(c, \varepsilon)$

لأجل ذلك دع

$$x \in N(a, \varepsilon')$$

إذن

$$|x - a| < \varepsilon'$$

ولكن

$$|x - c| = |x - a + a - c|$$

وأن

$$|x - c| \leq |x - a| + |a - c|$$

أي أن

$$|x - c| < \varepsilon' + \varepsilon - \varepsilon'$$

إذن

$$|x - c| < \varepsilon$$

وهذا يعني أن $x \in N(c, \varepsilon)$ وبهذا برهنا بأن أية نقطة مثل $x \in N(a, \varepsilon')$ فأنها تنتمي إلى $N(c, \varepsilon)$ وبهذا برهنا :

$$N(a, \varepsilon') \subset N(c, \varepsilon)$$

6.1.2 مبرهنة :

إذا كانت $a_1 , a_2 \in R$ بحيث $a_1 \neq a_2$ فيوجد $\varepsilon_1 > 0$ و $\varepsilon_2 > 0$ بحيث

$$N(a_1 , \varepsilon_1) \cap N(a_2 , \varepsilon_2) = \phi$$

البرهان:

حيث أن $a_1 \neq a_2$ لذا فان

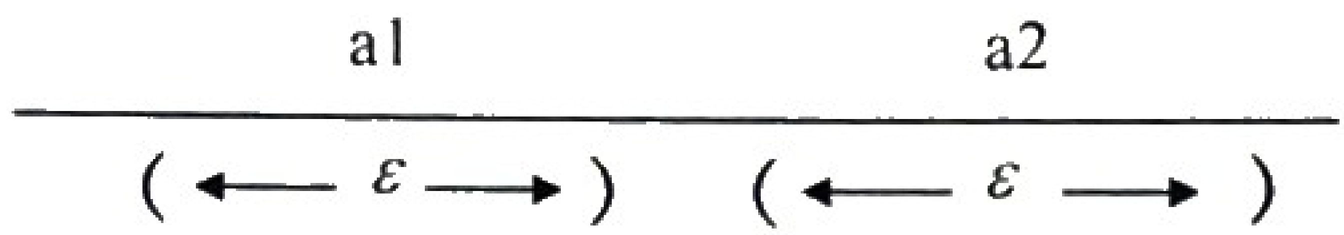
$$\left| a_1 - a_2 \right| > 0$$

ليكن:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{3} \left| a_1 - a_2 \right|$$

فيكون الجواران

$N(a_2, \varepsilon)$ و $N(a_1, \varepsilon)$



هما الجواران المطلوبان.

وللتأكد من ذلك دعنا نفرض أن: $N(a_1, \varepsilon) \cap N(a_2, \varepsilon) \neq \phi$

ولنفرض أن:

$$x \varepsilon N(a_1, \varepsilon) \cap N(a_2, \varepsilon)$$

إذن

$$x \varepsilon N(a_1, \varepsilon)$$

وكذلك

$$x \in N(a_2, \varepsilon)$$

وعليه يكون

$$|x - a_1| < \varepsilon \quad و \quad |x - a_2| < \varepsilon$$

وحيث أن

$$|a_1 - a_2| = |a_1 - x + x - a_2|$$

إذن

$$|a_1 - a_2| \leq |a_1 - x| + |x - a_2|$$

إذن

$$|a_1 - a_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

إذن

$$|a_1 - a_2| < \frac{2}{3}|a_1 - a_2|$$

أو

$$1 < \frac{2}{3}$$

وهذا تناقض واضح ولذلك يكون فرضنا أن تقاطع الجوارين ليس خالياً هو فرض غير صحيح لذلك يكون

$$N(a_1, \varepsilon) \cap N(a_2, \varepsilon) = \phi$$

وهو المطلوب.

7.1.2 مبرهنة:
لأية نقطة في تقاطع جوارين يوجد جوار لها يكون مجموعة جزئية من مجموعة تقاطع الجوارين.

البرهان:

لنكن

$$a \in N(a_1, \varepsilon_1) \cap N(a_2, \varepsilon_2)$$

$$\therefore \; a \in N(a_1, \varepsilon_1) \;,\; a \in N(a_2, \varepsilon_2)$$

وهذا يعني أن

$$|a - a_1| < \varepsilon_1 \;,\; |a - a_2| < \varepsilon_2$$

نلاحظ أن

$$\varepsilon_1 - |a - a_1| > 0 \;,\; \varepsilon_2 - |a - a_2| > 0$$

نفرض أن (ε) يمثل أصغر العددين الموجبين

$$\varepsilon_2 - |a - a_2| \text{ و } \varepsilon_1 - |a - a_1|$$

فيكون $N(a, \varepsilon)$ ، هو الجوار المطلوب.

لإيضاح ذلك نأخذ $x \in N(a_1, \varepsilon)$ لذلك يكون:

$$|x - a| < \varepsilon \leq \varepsilon_1 - |a - a_1| < \varepsilon_1$$

$$\therefore \; |x - a| < \varepsilon_1 - |a - a_1|$$

$$\therefore \; |x - a| + |a - a_1| < \varepsilon_1$$

ولكن

$$|x-a_1| = |x-a+a-a_1| \leq |x-a| + |a-a_1| < \varepsilon_1$$

$$\therefore \quad |x-a_1| < \varepsilon_1$$

$$\therefore \quad x \in N(a_1, \varepsilon_1)$$

$$\therefore \quad N(a, \varepsilon) \subset N(a_1, \varepsilon_1) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

وبالمثل نستطيع البرهنة أن

$$N(a, \varepsilon) \subset N(a_2, \varepsilon_2)$$

خذ $x \in N(a, \varepsilon)$

لذلك يكون:

$$|x-a| < \varepsilon \leq \varepsilon_2 - |a-a_1|$$

$$\therefore \quad |x-a| + |a-a_2| < \varepsilon_2$$

ولكن

$$|x-a_2| = |x-a+a-a_2| \leq |x-a| + |a-a_2| < \varepsilon_2$$

$$\therefore \quad |x-a_2| < \varepsilon_2$$

$$\therefore \quad x \in N(a_2, \varepsilon_2)$$

$$\therefore \quad N(a,\varepsilon) \subset N(a_2,\varepsilon_2) \quad \text{.......................} \quad \text{(ii)}$$

من (i) و (ii) نستنتج أن:

$$N(a,\varepsilon) \subset N(a_1,\varepsilon_1) \cap N(a_2,\varepsilon_2)$$

وبهذا يتم البرهان.

سنحتاج إلي مفهوم جديد، هو جوار النقطة دون أن يحتوي النقطة نفسها لأجل تعريف النقاط الملاصقة.

8.1.2 تعريف:

مجموعة النقاط x التي تنتمي إلي $N(a,\varepsilon)$ حيث $x \neq a$ تسمي جوار محذوف النقطة (Deleted Neighborhood) ويرمز له $N^*(a,\varepsilon)$.

ومن السهولة ملاحظة أن:

$$N^*(a,\varepsilon) = N(a,\varepsilon) \setminus \{a\}$$

وأن

$$N^*(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon)$$

9.1.2 ملاحظة:

بإمكاننا برهنة المبرهنات (5.1.2)،(6.1.2) و(7.1.2)

باستبدال كلمة جوار بعبارة جوار محذوف **(Deleted Neighborhood)**.

وسوف نبرهن أحد المبرهنات ونترك الباقي كتمرين .

10.1.2 مبرهنة:

إذا كان $x \in N^*(a, \varepsilon)$ **فيوجد** $N^*(x, \varepsilon')$ **بحيث:**

$$N^*(x, \varepsilon') \subset N^*(a, \varepsilon)$$

البرهان:

لما كان

$$x \in N^*(a, \varepsilon)$$
$$x \in (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$$

وهذا يعني أن

$x \in (a - \varepsilon, a)$ أو $x \in (a, a + \varepsilon)$

وبالاستناد من النظرية (5.1.2) نستطيع إيجاد جوار للنقطة x مثـــل $N(x, \varepsilon')$ بحيث:

$N(x, \varepsilon') \subset (a - \varepsilon, a)$ أو $N(x, \varepsilon') \subset (a, a + \varepsilon)$

وحيث أن

$$N^*(x, \varepsilon') \subset N(x, \varepsilon')$$

$$\therefore \quad N^*(x, \varepsilon') \subset (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$$
$$\therefore \quad N^*(x, \varepsilon') \subset N^*(a, \varepsilon)$$

وبهذا يتم البرهان.

11.1.2 مبرهنة:

لكل $a_1 , a_2 \in R$ حيث $a_1 \neq a_2$ يوجد جوارات محـــذوفي النقطتــين a_1 , a_2 مثل $N^* (a_2 , \varepsilon_2)$ و $N^* (a_1 , \varepsilon_1)$ بحيث:

$$N^* (a_1 , \varepsilon_1) \cap N^* (a_2 , \varepsilon_2) = \phi$$

12.1.2 مبرهنة:

لأية نقطة في تقاطع جوارين محذوفي النقطتين يوجد جـوار محـــذوف النقطة، يكون مجموعة جزئية من مجموعة تقاطع الجوارين.

13.1.2 مثال:

لتكن $A = \left\{ 1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{1}{4} , \frac{1}{5} , \ldots \right\}$ نجد أن الصفر لا ينتمـــي إلـــى A.

وبالرغم من عدم انتمائه،فانه قريب جدا من عناصر المجموعة (A) بكلام آخر فان أي جوار للصفر مهما كان نصف قطره صغيرا فهو يحوي على عدد غير منتهـــه من عناصر A، أي أن $N (0 , \varepsilon)$ يحتوي على عدد غير منتهه من عناصر A لأننا نستطيع إيجاد عدد طبيعي مثل (m) بحيث يكون $\varepsilon > \frac{1}{m}$ (حقيقة 12.3.1)

فكون كل العناصر $N^* (0 , \varepsilon) \ni \frac{1}{n}$ حيث $m < n$

عناصر مثل العنصر (0) في المثل السابق يكون ملازماً وملاصقاً لعناصر المجموعة A، فأي جوار له مهما كان صغيرا لابد وان يحتوي على نقاط من A. يوحي هذا المثال بالتعريف التالي:

14.1.2 تعريف:
يسمي العدد الحقيقي (a) عنصر ملاصقاً للمجموعة A
(cluster point) إذا وفقط إذا كان
$N^*(a, \varepsilon) \cap A \neq \phi$ لكل $\varepsilon > 0$.

15.1.2 مثال:

إذا كانت $A = \{x : 0 < x \leq 2\}$ فان الصفر عنصر ملاصق للمجموعة (A)، لان أي جوار محذوف نقطة الصفر $N^*(0, \varepsilon)$ يحوي نقاطاً من(A).

لاحظ أن $N^*(0, \varepsilon) \cap A \neq \phi$ نفس الكلام ينطبق على العدد 2، فهو إذن عنصر ملاصق للمجموعة A، أما إذا آخذنا أي نقطة غير نقطتي النهاية للمجموعة من(A) ف بإمكاننا إيجاد جوار محذوف لها يكون مجموعة جزئية من المجموعة(A).

وهذا يثبت أن المجموعة $\{x : 0 \leq x \leq 2\} = [0, 2]$ تمثل جميع النقاط الملاصقة للمجموعة A.

من المثال أعلاه لاحظنا أن الصفر عنصر ملاصق للمجموعة (A) وهو لا ينتمي إلى (A) بينما جميع النقاط الأخرى تنتمي إلي (A).

16.1.2 مثال:

إذا كانت $A = \{ 1 , 2 , 3 , 4 \}$ فان أيا من هذه العناصر ليس ملاصقا للمجموعة A وذلك لان $A \cap N^*\left(1 , \frac{1}{10} \right) = \phi$ ويصح ذلك لبقية العناصر.

أما العناصر التي لا تنتمي إلى (A) فلا يوجد بينها عنصر ملاصق للمجموعة A لان:

$$A^C = (-\infty , 1) \cup (1 , 2) \cup (2 , 3) \cup (3 , 4) \cup (4 , \infty)$$

ولأي $x \in A^C$ يمكن إيجاد $N (x , \varepsilon)$ بحيث $N^*(x , \varepsilon) \subset A^C$

إذن يكون

$$N^*(x , \varepsilon) \cap A = \phi$$

إذن x غير ملاصقة للمجموعة A.

إذن مجموعة العناصر الملاصقة للمجموعة $A = \phi$

17.1.2 مثال:

إذا كانت Q تمثل الأعداد النسبية فان أي عدد $x \in Q$ هو عنصر ملاصق للمجموعة Q، لان $N^*(x , \varepsilon)$ يحتوي على عدد غير منته من الأعداد النسبية، وإذا كان $y \in Q^c$ فان y عدد غير نسبي، وان أي جوار $N^*(y , \varepsilon)$ يحوي كذلك أعداد نسبية فلذلك كل عناصر المجموعةR هي عناصر ملاصقة للمجموعة Q.

أن الأمثلة السابقة نستطيع أن نعرف مجموعة العناصر الملاصقة لمجموعة ونسميها المجموعة المشتقة (Derived Set).

18.1.2 تعريف:

المجموعة التي عناصرها كل النقاط الملاصقة للمجموعة A تسمي بالمجموعة المشتقة للمجموعة A (Derived Set) ويرمز لها A'

19.1.2 مثال:

لتكن $A = \{ x : 1 < x < 2 \}$ فان كل نقطة من نقاط A هي نقطة ملاصقة للمجموعة A، وكذلك النقطتان 1،2 لذا فان:

$$A' = \{ x : 1 \leq x \leq 2 \}$$

20.1.2 مثال:

إذا كانت $A = \{ 1 , 2 , 3 , 4 \}$ فان $A' = \phi$ لاحظ المثال (16.1.2).

21.1.2 مثال:

إذا كانت

$$A = \{ x : 1 < x < 2 \} \cup \{ 3 , 4 , 5 \}$$

فإن:

$$A' = \{ x : 1 \leq x \leq 2 \}$$

22.1.2 تعريف:

لتكن (A) مجموعة ولتكون A' مجموعتها المشتقة، يسمي $A \cup A'$ بمغلق المجموعة A (closure A) ويرمز له بالرمز $\overline{A}$ أي أن

$$\overline{A} = A \cup A'$$

23.1.2 مثال:

إذا كانت Q تمثل الأعداد النسبية فإن $\overline{Q} = R$

24.1.2 مثال:

إذا كانت $A = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$

فان $\overline{A} = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$

25.1.2 مثال

إذا كانت $A = (0 , 1) \cup \{2 , 3 , 4\}$

فان $\overline{A} = [0 , 1] \cup \{2 , 3 , 4\}$

26.1.2 مبرهنة:
إذا كانت كل من B،A مجموعة وكان $A \subset B$ فان $\overline{A} \subset \overline{B}$

البرهان:

ليكن $x \in \overline{A}$ فإما $x \in A$ وهذا يؤدي إلـى أن $x \in B$ لأن $A \subset B$
ويؤدي ذلك إلى أن $x \in B \cup B' = \overline{B}$

أي $x \in \overline{B}$ ويكون المطلوب قد تم أي أن $\overline{A} \subset \overline{B}$.

وأما $x \in A'$ أي يكون x ملاصقا للمجموعة A وهذا يعني أن

$$A \cap N^*(x , \varepsilon) \neq \phi$$

وحيث أن كل عناصر A هي عناصر في B لذلك يكون

$$B \cap N^*(x , \varepsilon) \neq \phi$$

ولذلك يكون x ملاصقا للمجموعة B. إذن $x \in B'$ ويؤدي هذا إلى أن $x \in \overline{B}$ وبهذا يكون $\overline{A} \subset \overline{B}$ وهو المطلوب.

27.1.2 مبرهنة:

إذا كانت A مجموعة فإن $(\overline{A})' \subset \overline{A}$

البرهان:

سنفرض أن $x \notin \overline{A}$ وسنبرهن أن x ليست نقطة ملاصقة للمجموعة $(\overline{A})$ وهذا يعني أن $(\overline{A})$ تحوي جميع نقاطها الملاصقة.

فإذا كان $x \notin \overline{A}$ فان هذا سيؤدي إلى وجود جوار للنقطة (x) هو $N(x, \varepsilon)$ بحيث $A \cap N(x, \varepsilon) = \phi$.

لأنه لو صح وكان كل جوار للنقطة (x) يقطع المجموعة (A)، لكانت (x) نقطة ملاصقة للمجموعة (A) وهذا يقضي بانتمائها للمجموعة $\overline{A}$ وهو خلاف الفرض. في الوقت نفسه يجب أن لا يحتوي $N(x, \varepsilon)$ أية نقطة من نقاط A'، لأنه لو كانت $y \in N(x, \varepsilon)$ و $y \in A'$ لوجد جوار للنقطة y مثل $N^*(y, \varepsilon')$ بحيث:

$$N^*(y, \varepsilon') \subset N(x, \varepsilon)$$

حسب نظرية (10.1.2) وحيث أن $N^*(x, \varepsilon)$ لا يتقاطع مع A لذلك فإن $N^*(y, \varepsilon')$ لا يتقاطع مع A وهذا يؤدي إلي أن $y \notin A'$ وهذا يناقض الفرض، بهذا برهنا أن الجوار $N(x, \varepsilon)$ لا يقاطع A ولا يقاطع A' أي أن:

$$N(x, \varepsilon) \cap \overline{A} = \phi$$

وهذا يعني أن x ليس عنصرا ملاصقا للمجموعة $\overline{A}$ وبهذا برهنا على أن أية نقطة لا تنتمي إلي $\overline{A}$ هي ليست عنصرا ملاصقا للمجموعة $\overline{A}$ وهذا يؤدي إلـــي أن $\overline{A}$ تحوي جميع عناصرها الملاصقة أي أن: $\left(\overline{A}\right)' \subset \overline{A}$ وهو المطلوب.

28.1.2 نتيجة:

لكل مجموعة A يكون $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

البرهان:

نعلم أن

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A} \cup \left(\overline{A}\right)'$$

وحيث أن $\left(\overline{A}\right)' \subset \overline{A}$ من مبرهنة (27.1.2)

إذن $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

29.1.2 مبرهنة:

إذا كانت كل من A،B مجموعة جزئية من R فإن:

(1) إذ كان $A \subset B$ فإن $A' \subset B'$

(2) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

(3) $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$

(4) $(A')' \subset A'$

البرهان:

سنحاول برهنة (1)،(2)،(3) وسوف نترك (4) كتمرين.

(1) لتكن $A \subset B$ ولتكن $x \in A'$ لذلك فان أي جوار مثل $N^*(x, \varepsilon)$ سيحوي على نقطة واحده على الأقل من المجموعة A وحيث أن $A \subset B$ فستكون تلك النقطة منتمية إلى B أيضا فـان أي جـوار للنقطـة x مثـل $N^*(x, \varepsilon)$ سيحوي على نقطة واحده على الأقل من نقـاط B، وهـذا يعني أن x عنصر ملاصق للمجموعة B أي أن $x \in B'$ إذن $A' \subset B'$.

(2) نفرض أن $H = A \cup B$ لذلك سيكون $A \subset H$ وعليه فان $A' \subset H'$ وكذلك $B \subset H$ ومنه $B' \subset H'$ لذلك فان:

$$A' \cup B' \subset H' = (A \cup B)' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

ولأجل أن يتم البرهان علينا أن نبرهن أن

$$(A \cup B)' \subset A' \cup B'$$

لتكن $x \in (A \cup B)'$ ، إذن فأي جوار للنقطة x مثل $N^*(x, \varepsilon)$ لابد أن يحقق

$$N^*(x, \varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \phi$$

$$\therefore \quad [N^*(x, \varepsilon) \cap A] \cup [N^*(x, \varepsilon) \cap B] \neq \phi$$

وهذا يعني أن

$N^*(x, \varepsilon) \cap A \neq \phi$ أو $N^*(x, \varepsilon) \cap B \neq \phi$

إذن

$x \in A'$ أو $x \in B'$

أي أن

$$x \in A' \cup B'$$

$$\therefore \quad (A \cup B)' \subset A' \cup B' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

لذلك

$$(A \cup B)' = A' \cup B'$$

(3) لتكن $A \cap B \subset A$ لذلك فإن

$$(A \cap B)' \subset A' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (i)$$

وأن $A \cap B \subset B$ لذلك فإن

$$(A \cap B)' \subset B' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (ii)$$

إذن

$$(A \cap B)' \subset A' \cap B'$$

وبهذا يتم البرهان.

بعض المجموعات مثل المجموعة $\{x : 0 \le x \le 1\} = A$ تحوي جميع نقاطها الملاصقة مثل هذه المجموعة تسمى مجموعة مغلقة بصوره عامة:

30.1.2 تعريف:

تسمى المجموعة مغلقة إذا وفقط إذا كانت تحوي على جميع نقاطها الملاصقة أي تكون A مغلقة إذا وفقط إذا كانت $A' \subset A$

31.1.2 مبرهنة:

تكون المجموعة A مغلقة إذا وفقط إذا كان $A = \overline{A}$.

البرهان:

لتكن A مغلقة $A' \subset A$ إذن لذلك فان $A = A \cup A'$ أي أن $A = \overline{A}$

أما إذا كان $A = \overline{A}$ فان ذلك يعني أن: $A = \overline{A} = A \cup A'$

إذن $A = A \cup A'$ ولذلك فان $A' \subset A$ وهذا يبرهن أن Aمغلقة.

32.1.2 مثال:

كل من المجموعات الآتية مغلقة:

$$R , \{1 , 2 , 3 , 4\} , \{x : x \geq 2\} , [2 , 3]$$

لأنها تحتوي على نقاطها الملاصقة كما مر في الأمثلة السابقة.

بعض المجموعات تحتوي على عناصر وهذه العناصر ليست ملاصقة للمجموعة فمثلا إذا كانت $A = (0 , 1) \cup \{3 , 4 , 5\}$

فكل من العناصر 5،4،3 غير ملاصقة للمجموعة A، مثل هذه العناصر تسمى عناصر معزولة بصورة عامة.

33.1.2 تعريف:

لعنصر الذي ينتمي إلي مجموعة ولا يكون ملاصقاً لها يسمى عنصراً معزولاً (Isolated).

14.1.2 مثال:

عناصر المجموعات الآتية عناصر معزولة:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$$

فالعنصر $\frac{1}{n}$ معزول لأن الجوار $N^*\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right)$ لا يحوي أي عنصر من عناصر المجموعة A.

العناصر 3،4،5 من المجموعة $\{3, 4, 5\} \cup (0, 1) = A$ هي عناصر معزولة لأن $N^*\left(3, \frac{1}{10}\right) \cap A = \phi$

وهكذا للعنصرين 5 و4.

> **35.1.2 تعريف:**
>
> يقال للمجموعة التي عناصرها معزولة فقط بأنها مجموعة معزولة العناصر أو مجموعة متفردة (Discrete Set).

فالمجموعتان A،N مجموعتان معزولتا العناصر والمجموعة $\{3, 5, 7, 9, 11\}$ مجموعة متفردة.

36.1.2 ملاحظة:

لإثبات أن مجموعة ما مجموعة معزولة العناصر علينا إيجاد جوار محذوف العنصر لا يتقاطع مع تلك المجموعة وإذا عجزنا عن ذلك فإن ذلك العنصر سيكون عنصرا ملاصقا للمجموعة.

وقد يحدث أن يكون للمجموعة المعزولة العناصر عنصر ملاصق ولكن هذا العنصر الملاصق لا ينتمي إليها كما يتضح ذلك من المثال التالي:

$$A = \left\{ 1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{1}{4} ,.... \right\}$$

فكل عناصرها معزولة كما مر شرح ذلك وان الصفر عنصر ملاصق لها ولكنه لا ينتمي إليها. قد يحث النقيض إذا قد تكون جميع عناصر مجموعة ما

عناصر ملاصقة لها عند ئد نسميها مجموعة كثيفة بنفسها. فكل عناصر المجموعة $(0,1)$ عناصر ملاصقة لها.

37.1.2 تعريف:

المجموعة التي عناصرها ملاصقة لها تسمى مجموعة كثيفة بنفسها (Dense in itself) ، أي تكون A كثيفة بنفسها إذا كان $A \subset A'$.

38.1.2 مثال:

المجموعة $(2,4)$ كثيفة بنفسها لان كل عنصر من عناصرها عنصر ملاصق لها.

39.1.2 مثال:

مجموعة الأعداد النسبية Q مجموعة كثيفة بنفسها لان كل عنصر من عناصرها هو عنصر ملاصق لها. كما مر في الأمثلة السابقة. وكل عنصر في R عنصر ملاصق لها أيضا. بعض المجموعات لا تحتوي على أي عنصر ملاصق لها خارجها، فكل عناصرها الملاصقة تنتمي لها فهي إذن مغلقة، مثل R.

40.1.2 تعريف:
المجموعة الكثيفة بنفسها والمغلقة تسمى مجموعة تامة (Perfect set).

41.1.2 مثال:
المجموعة $[0,1]$ مجموعة تامة وكذلك R.

42.1.2 نتيجة:
تكون المجموعة تامة إذا وفقط إذا كان $A = A'$.

43.1.2 مثال:
المجموعة الخالية ϕ مجموعة تامة، والمجموعة $\{ x : x \geq a \}$ كذلك.

44.1.2 تعريف:
تكون المجموعة مفتوحة إذا كانت مكملتها مغلقة أي تكون G مفتوحة إذا كانت $R \setminus G$ مغلقة.

45.1.2 مثال:
تكون R مفتوحة لان ϕ مغلقة وتكون المجموعة (a , b) مفتوحة لان مكملتها $\{ x : a \geq x \,,\, x \geq b \}$ مغلقة.
قد يتبادر إلي الأذهان أن المجموعات أما تكون مغلقة أو تكون مفتوحة ولكن هنالك مجموعات ليست مفتوحة مثل (a , b] .
وليست مغلقة لأنها تحتوي بعض النقاط الملاصقة ولا تحتوي الأخرى وهناك مجموعات مغلقة ومفتوحة في أن واحد مثل ϕ والمجموعة R.

46.1.2 مبرهنة:

تكون المجموعة G مفتوحة إذا وفقط إذا وجد جوار لكل نقطة تنتمي إلي G، وكان مجموعة جزئية من G.

البرهان:

لتكن G مجموعة مفتوحة، ولتكن $x \in G$ إذن $x \notin G^C$ لذلك فالمجموعة G^C مجموعة مغلقة، فهي إذن تحتوي جميع نقاطها الملاصقة، ولهذا فإن x ليست عنصراً ملاصقاً للمجموعة G^C .

إذن يوجد جوار للنقطة x مثل $N(x, \varepsilon)$ بحيث:

$$N(x, \varepsilon) \cap G^C = \phi$$

وهذا يؤدي إلى

$$N(x, \varepsilon) \subset G$$

ولبرهنة العكس نفرض أن لكل نقطة من نقاط G جواراً محتوى في G وهذا يعني أن كل نقطة في نقاط G ليست عنصراً ملاصقاً للمجموعة G^C، وهذا يؤدي إلي أن G^C تحتوي على جميع عناصرها الملاصقة، أي أن G^C مجموعة مغلقة. لذلك تكون المجموعة G مجموعة مفتوحة وبهذا يتم البرهان.

47.1.2 تعريف:

المجموعة القابلة للعد(Countable Set) هي المجموعة التي يوجد بينها وبين مجموعة الأعداد الطبيعية تناظر.

ص

48.1.2- ملاحظة:

(1) يمكننا القول أن المجموعة المعدودة هي المجموعة التي يمكن ترقيم عناصرها.

(2) أن كل مجموعة مكافئة لمجموعة معدودة هي مجموعة معدودة.

(3) تكون المجموعة المنتهية معدودة.

49.1.2 مثال

أن مجموعة الأعداد الزوجية الموجبة معدودة لأنه يوجد تقابل بينها وبين مجموعة الأعداد الطبيعية.

2.2 اتحاد وتقاطع المجموعات المغلقة والمفتوحة
Union and Intersection of Closed and Open Sets

1.2.2 مبرهنة:

تقاطع عدد منته من المجموعات المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة.

البرهان:

لتكن

$A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, A_n$

(n) من المجموعات المفتوحة وليكن:

$A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

وعلينا الآن أن نبرهن أن A مجموعة مفتوحة. فإذا كانت A خالية فالمطلوب قد تم لأن ϕ مجموعة مفتوحة أما إذا كانت $A \neq \phi$ فنفرض أن $x \in A$ لذلك فإن

$x \in A_n, \ldots\ldots, x \in A_2, x \in A_1$

وحيث أن

A_i مفتوحة لكل $i = 1,2,\ldots\ldots\ldots,n$ لذلك يوجد $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots\ldots, \varepsilon_n$

بحيث

$$N(x, \varepsilon_1) \subset A_1 \quad , \quad N(x, \varepsilon_2) \subset A_2, \ldots\ldots\ldots, N(x, \varepsilon_n) \subset A_n$$

نفرض أن:

$$\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \varepsilon_n)$$

نلاحظ أن

$$N(x, \varepsilon) \subset N(x, \varepsilon_1)$$

وان

$$N(x, \varepsilon) \subset N(x, \varepsilon_2)$$

وهكذا:

$$N(x, \varepsilon) \subset N(x, \varepsilon_i) \subset A_i \quad (i = 1,2,\ldots\ldots, n)$$

$$N(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

وبهذا برهنا أن $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ مجموعة مفتوحة استنادا إلي المبرهنة(46.1.2).

2.2.2 مبرهنة:

اتحاد عدد منته من المجموعات المغلقة يكون مجموعة مغلقة.

البرهان:

لتكن F_1 ، F_2 ، F_3 ، .... ، F_n

(n) من المجموعات المغلقة، لذلك فان:

F_1^c ، F_2^c ، F_3^c ، .... ، F_n^c

(n) من المجموعات المفتوحه.

إذن المجموعة $\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i^c \right)$ مجموعة مفتوحة (المبرهنة 1.2.2).

ولكن من قانون ديمورجان:

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i^c \right) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i \right)^c$$

إذن المجموعة $\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i \right)^c$ مفتوحة لذلك $\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i \right)$ مجموعة مغلقة وبهذا يتم البرهان.

3.2.2 مبرهنة

اتحاد أي عائلة من المجموعات المفتوحة تكون مجموعة مفتوحة.

البرهان:

لتكن G_i مجموعة مفتوحة لأي $i \in I$ حيث I أي مجموعة (منتهيــة، غيــر منتهية، قابلة للعد أو غير قابلة للعدد)..

علينا أن نبرهن أن $\left(\bigcup_{i \in I} G_i \right)$ مجموعة مفتوحة.

نفرض أن $x \in \left(\bigcup_{i \in I} G_i \right)$ إذن توجد مجموعة واحدة على الأقل

مثل G_k حيــــث $x \in G_k$ وان $k \in I$، وبما أن G_k مفتوحة بالفرض لذلك يوجد جوار للنقطة x مثل $N(x,\varepsilon)$ بحيث $N(x,\varepsilon) \subset G_k$ وحيث أن:

$$G_K \subset \bigcup_{i \in I} G_i$$

إذن

$$N(x,\varepsilon) \subset \left(\bigcup_{i \in I} G_i \right)$$

إذن المجموعة $\left(\bigcup_{i \in I} G_i \right)$ مفتوحة حسب نظرية (46.1.2)

4.2.2 مبرهنة:

تقاطع أي عائلة من المجموعات المغلقة تكون مجموعة مغلقة.

البرهان:

لتكن F_i مجموعة مغلقة لكل $i \in I$ حيث I أية مجموعة.

إذن F_i^c مجموعة مفتوحة لكل $i \in I$ ولذلك فان المجموعة $\bigcup_{i \in I} F_i^c$ مفتوحة (نظرية 3.2.2).

ولكن من قانون ديمورجان:

$$\left(\bigcup_{i \in I} F_i^c \right) = \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right)^c$$

بما أن $\left(\bigcap_{i \in I} F_i \right)^c$ مجموعة مفتوحة إذن $\left(\bigcap_{i \in I} F_i \right)$ مجموعة مغلقة،

وبهذا يتم البرهان.

5.2.2 مثال:

ليكن

$$F_n = \left[-2 + \frac{1}{n} \; , \; 2 - \frac{1}{n} \right] \; , \; n = 1 \; , \; 2 \; , \; 3 \; , \; \ldots$$

أي أن

$$F_1 = [-1 , 1] \; , \; F_2 = \left[-1\tfrac{1}{2} , 1\tfrac{1}{2} \right] \; , \; F_3 = \left[-1\tfrac{2}{3} , 1\tfrac{2}{3} \right] \; , \; \ldots$$

لاحظ أن F_n فترة مغلقة لكل n حيث

$$(n = 1 \; , \; 2 \; , \; 3 \; , \; \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots)$$

وان

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (-2 \; , \; 2)$$

وهي مجموعة مفتوحة. هذا المثال يوضح أن اتحاد مجموعات مغلقة قد لا يكون مغلقا.

6.2.2 مثال:

لقد مر بنا في تمرين سابق أن $\{x\}$ مجموعة مغلقة لان مجموعتها المشتقة تساوي ϕ وان:

$$\bigcup_{x\in(0,1)} \{x\} = (0,1)$$

وهذا يوضح أن اتحاد المجموعات المغلقة قد يكون مفتوحاً وهذا لا يتعارض مع نص (مبرهنة 2.2.2)لان الاتحاد في هذه النظرية كان لعدد منته من المجموعات المغلقة.

7.2.2 مثال:

المجموعات

$$F_1 = (-1\ ,\ 1)\ ,\ F_2 = \left(-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right)\ ,\ F_3 = \left(-\frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{3}\right)\ ,\ \ldots\ldots\ \ F_n = \left(-\frac{1}{n}\ ,\ \frac{1}{n}\right)$$

عبارة عن مجموعات مفتوحة فإذا لاحظنا تقاطعهما نجد انه:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{\,0\,\}$$

وحيث أن $\{\,0\,\}$ مجموعة مغلقة، نجد أن تقاطع المجموعات المفتوحة لا يشترط فيه أن يكون مفتوحاً، وهذا لا يناقض (نظرية 1.2.2)

لان التقاطع هناك لعدد منته من المجموعات المفتوحة.

8.2.2 مثال:

وهذا المثال يوضح أن تقاطع المجموعات المفتوحة قد يكون مجموعة مغلقة:

$$F_1 = (-2\ ,\ 2)\ ,\ F_2 = \left(-1\frac{1}{2}\ ,\ 1\frac{1}{2}\right)\ ,\qquad ,F_n = \left(-1\frac{1}{n}\ ,\ 1+\frac{1}{n}\right)$$

نلاحظ أن:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) = [-1, 1]$$

نترك ألان اتحاد وتقاطع المجموعات المغلقة والمفتوحة لندرس نقاط المجموعة ذاتيا، وفيما يلي سندرس النقاط الخارجية والداخلية ونقاط الحدود للمجموعات .

9.2.2 **تعريف:**

تكون النقطة x نقطة داخلية للمجموعة (Interior Point)، إذا وجد جوار لها مثل $N(x, \varepsilon)$ بحيث $N(x, \varepsilon) \subset A$ ويرمز لمجموعة النقاط الداخلية للمجموعة A بالرمز A° .

10.2.2 **مثال:**

كل نقطة من نقاط الفترة المفتوحة $(1, 2)$ هي نقطة داخلية لها.

وكذالك كل نقطة من نقاط المجموعة المفتوحة A هي نقطة داخلية للمجموعة A (راجع مبرهنة 46.1.2).

11.2.2 **تعريف:**

تكون النقطة x نقطة خارجية بالنسبة للمجموعة A إذا وجد جوار للنقطة x مثل $N(x, \varepsilon)$ بحيث أن $N(x, \varepsilon) \subset A'$ يرمز لمجموعة النقاط الخارجية للمجموعة A بالرمز $\text{Ext}(A)$ اختصار للتعبير (Exterior Points of A).

12.2.2 مثال:

لتكن $A = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$ فان كل نقطة من نقاط $R \setminus A$ هي نقطة خارجية بالنسبة للمجموعة A . لا ننا نستطيع إيجاد جوار لها لا يتقاطع مع A.
فمثلا إذا كانت $x \in R \setminus A$ نلاحظ مجموعة الأعداد:

$$\{ |x-1| , |x-2| , |x-3| , |x-4| , |x-5| \}$$

ونفرض أن

$$\varepsilon = \min \{ |x-1| , |x-2| , |x-3| , |x-4| , |x-5| \}$$

لذلك يكون الجوار $(x-\varepsilon , x+\varepsilon)$ محتوى في R\A وعليه تكون x نقطة خارجية بالنسبة للمجموعة A، ويصح ذلك على أية نقطة أخرى.

13.2.2 مثال:

لتكن $A = [2 , 3]$ فالمجموعة $\{ x : 2 > x , x > 3 \}$ هي مجموعة كل النقاط الخارجية بالنسبة للمجموعة A . وذلك لان A مغلقة وان A^C تكون مفتوحة لذلك لكل نقطة x في A^C يوجد جوار بحيث:

$$N(x , \varepsilon) \subset A^C$$

ومن السهولة ملاحظة أن :

مجموعة النقاط الخارجية لأية مجموعة تكون مجموعة مفتوحة (برهن ذلك) بالاستعانة بالمبرهنة (46.1.2).

14.2.2 تعريف:

تكون النقطة x نقطة حدود بالنسبة للمجموعة A (Boundary Point) إذا كان كل جوار $N(x , \varepsilon)$ للنقطة x يحقق الشرطين:

$$N(x , \varepsilon) \cap A^C \neq \phi , N(x , \varepsilon) \cap A \neq \phi$$

15.2.2 مثال:

لتكن $A = (0 , 1)$ نلاحظ أن أي جوار للنقطة 0 والنقطة واحد يقاطع كلا من A، A^c لذلك فان مجموعة نقاط الحدود هي $\{0 , 1\}$ ولإيضاح ذلك نقول أن

$$(0 , 1) \cap (-\varepsilon , \varepsilon) = (0 , \varepsilon)$$

وان:

$$(-\varepsilon , 0) = \{R \setminus (0 , 1)\} \cap (-\varepsilon , \varepsilon)$$

وكلا من الفترتين $(0 , \varepsilon)$ ، $(-\varepsilon , 0)$ تحتوي على عدد منته من النقاط.

16.2.2 مثال:

لتكن المجموعة $A = \{1 , 2 , 3 , 4 , ... , n\}$ تمثل n من النقاط نلاحظ أن أي جوار لأي نقطة من نقاط A يحوي تلك النقطة من A وعدد غير منته من نقاط $R \setminus A$ فان جميع نقاط A تعتبر نقاط حدود بالنسبة للمجموعة A.

17.2.2 مثال:

لتكن Q مجموعة الأعداد النسبية، نلاحظ أن جوار أية نقطة من نقاط Qيحوي تلك النقطة من Qويحوي عددا غير منته من نقاط $R \setminus Q$

لذلك فكل نقطة من نقاط Q هي نقطة حدود للمجموعة Q. ولو أردنا تحديد النقاط الداخلية بالنسبة للمجموعة Q نجد أنها خالية، وكذلك فان مجموعة النقاط الخارجية للمجموعة Q هي المجموعة الخالية وذلك لعدم وجود جوارات لنقاط Q تكون مجموعات جزئية من Q والشئ نفسه يقال لنقاط Q^c. (تذكر أن عددا غير نسبي يوجد بين أي عددين حقيقيين وكذلك يوجد عدد نسبي بين أي عددين غير نسبيين).

لاحظنا من الأمثلة السابقة أنه لا يشترط بصفة الحد العلوي لمجموعة ما أن يكون عنصراً من تلك المجموعة.

2.2.18 مثال:

مجموعة حدود المجموعة $\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\} = A$ هي المجموعة $\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\}$

فالصفر عنصر حدود ولكنه لا ينتمي إلى A.

2.2.19 تعريف:

المجموعة المحدودة من الأعلى هي تلك المجموعة التي تكون عناصرها أصغر من أو تساوي عدد حقيقي معلوم. فالمجموعة A محدودة من الأعلى إذا وجد عدد حقيقي M بحيث $M \geq x$ لكل $x \in A$.

لاحظ أن أي عدد أكبر من M يصلح أن يكون حداً أعلى لها فالحد الأعلى للمجموعة ليس وحيداً ولا يشترط فيه أن يكون عنصراً من عناصر المجموعة.

الشيء نفسه يقال عن المجموعة المحدودة من الأسفل.

وقد تم التطرق إلى هذا في الفصل الأول في البند (1 . 2) وبشكل مفصل.

2.2.20 ملاحظة:

إذا كانت المجموعة منتهية فإن أكبر عنصر فيها يكون هو أحد حدودها العليا ويكون هو أصغر حد أعلى فيها، وكذلك فالمجموعة المنتهية تحتوي على أصغر عنصر فيها ويكون أكبر حد أدنى للمجموعة.

أما إذا كانت المجموعة غير منتهية فقد تمتلك من بين عناصرها حدا أعلى ويكون اصغر حدا أعلى للمجموعة مثل العدد 3 في المجموعة [2،3] وكذلك فالعدد 2 اصغر عناصر المجموعة [2،3] هو اصغر حد أدنى لها .

قد ينتمي اصغر حد أعلى إلي المجموعة أو قد لا ينتمي وكذلك اكبر حد أدنى.

مبرهنة 21.2.2 : اكبر حد أدنى لمجموعة غير خالية يكون أما عنصرا فيها أو ملاصقا لها.

البرهان:

لنفرض أن A مجموعة غير خالية وأنها محدودة من الأسفل فإذا كانت A منتهيه فأنها تحتوي من بين عناصرها على اصغر عنصر ويكون هو الحد الأدنى الأصغر.

أما إذا كانت A غير منتهيه وكانت محدودة من الأدنى،فحسب مسلمة الكمال لابد من وجود عنصر مثل a يمثل اكبر حد أدنى للمجموعة فإن كان

$a \in A$ فقد تم المطلوب ، وإذا كان $a \notin A$ فعلينا البرهنة على أن a عنصر ملاصق للمجموعة A.

لنأخذ الجوار $N(a, \varepsilon)$ سنلاحظ انه يتقاطع مع A ولتوضيح ذلك نقول أن:

$$N^*(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$$

وحيث أن a اكبر حد أدنى للمجموعة . أذن لابد من وجود $x \in A$ بحيث $a < x < a + \varepsilon$ (مبرهنة 10.3.1).

أذن يوجد x حيث $x \in A$ و $x \in N(a, \varepsilon)$ لكل $\varepsilon > 0$ لذلك فان a عنصر ملاصق للمجموعة A. وبهذا يتم المطلوب.

3.2 تبولوجيا الأعداد الحقيقية (Topolagy of Real Numbers)

1.3.2 ملاحظة:

مما مر من مفاهيم بالمجموعات المغلقة والمفتوحة نستطيع تلخيص بعض الأمور منها:

(1) أن كلا من ϕ ، R مجموعة مفتوحة.

(2) إذا كانت كل من A ، B مجموعة مفتوحة فان $A \cap B$ مجموعة مفتوحة.

(3) أن اتحاد أي عائلة من المجموعات المفتوحة تكون مجموعة مفتوحة.

أن الصفات أو الخواص من (1-3) تعتبر أساسية في برهنة كثير من المبرهنات، ولذلك جردت من النظريات الخاصة بالأعداد الحقيقية وعممت على شكل تعريف للتبولوجيا على النحو التالي:

2.3.2 تعريف:

إذا كانت X مجموعة وكانت T عائلة من المجموعات الجزئية للمجموعة X بحيث تحقق الشروط الآتية:

(1) ϕ , X تنتمي إلي T

(2) إذا كانت $A , B \in T$ فان $A \cap B \in T$

(3) اتحاد أي عائلة من المجموعات التي تنتمي إلي T، تنتمي بدورها إلي T أي إذا كان $A_i \in T$ لكل $i \in I$ حيث I أي مجموعة فان: $\bigcup_{i \in I} A_i \in T$

تسمى المجموعة T تبولوجيا للمجموعة X ويسمى الزوج (X,T) فضاء تبولوجيا (Topological Space).

يطلق على عناصر المجموعة T مجموعات مفتوحة.

مثال: 3.3.2

لتكن $X = \{a, b, c\}$ وليكن:

$$T = \{\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

لأجل اختيار أن T تبولوجي للمجموعة علينا أن نتأكد 3,2,1 في تعريف (2.3.2) محققة.

(1) المجموعات ϕ ، X تنتميان إلي T حسب التعريف

(2) لو أخذنا أي زوج من مجموعات T مثلا $\{a\}, \{a, b\}$ نجد أن:

$$\{a\} \cap \{b\} = \phi \in T \quad , \quad X \cap \{b\} = \{b\} \in T$$

$$\{a\} \cap \{a, b\} = \{a\} \in T$$

وهكذا لبقية الأزواج. لذلك فالشرط 2 متحقق.

(3) لتكن: $\{\{a\}, \{b\}\}$ أحدى عوامل مجموعات T نلاحظ أن:

$$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \in T$$

ويصح ذلك لأي عائلة من مجموعات T أي يكون اتحاد أي عائلة من مجموعات T مجموعة في T .

مثال: 4.3.2

لتكن X أية مجموعة ولتكن T تمثل المجموعات الجزئية كافة من المجموعات X ، لأجل معرفة أن T تبولوجي للمجموعة X علينا التحقق من أن T تحقق شروط تعريف التبولوجي:

(1) حيث أن :

$X \subseteq X , \phi \subset X$ لذلك فان $\phi , X \in T$

(2) إذا كانت $A \subset X$, $B \subset X$ فإن $B \cap A \subset X$

ولذلك إذا كانت $A , B \in T$ فإن $A \cap B \in T$

(3) إذا كانت $A_i \in T$ لكل $i \in I$ أي أن $A_i \subset X$ فإن $\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$

مجموعة جزئية من X لذلك:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \in T$$

ولذلك يكون T تبولوجي إلي X ومجموعاته التي نسميها مجموعات مفتوحـــة هي المجموعات الجزئية للمجموعة X كافة.

5.3.2 مثال:

لتكن X أية مجموعة وليكن $T = \{ \phi , X \}$ فان الشروط (3,2,1) التعريف التبولوجي متحققه لذلك فان T تبولوجي للمجموعة X ويسمى التبولوجي التافـــة للمجموعة X (Trivial Topology).

6.3.2 ملاحظة:

أن لكل مجموعة غير خالية X هنالك تبولوجيـــان الأول يحـــوي لمجموعـــات الجزئية للمجموعة X كافة والثاني التبولوجي التافة وقـــد يكـــون للمجموعـــة X تبولوجيات أخرى.

7.3.2 مثال:

إذا كانت $X = R$ مجموعة الأعداد الحقيقية وكانت Tمعرفة بالشكل التـــالي:

$$T = \left\{ A : A \subset R , \forall x \in A ; \exists \varepsilon > 0 : N(x, \varepsilon) \subset A \right\}$$

نلاحظ أن عناصر T هي المجموعــات المفتوحـــة وفـــق التعريـــف ومبرهنـــة (46.1.2).

وان الشرط (1) يكون ϕ , R مجموعات مفتوحة قد مرت معالجته.

وان الشرط (2) هو حالة خاصة من مبرهنة (1.2.2).

أما الشرط (3) من تعريف التبولوجي فهو محقق بالبرهنة (3.2.2).

لذلك فان T تبولوجي للمجموعة R ويعرف هذا التبولوجي بأســـم التبولـــوجي الاعتيادي للأعداد الحقيقية.(Usual Topolagy).

4-2 تمارين

(1) أعط مثالا يوضح بأن A' لا يشترط أن تكون مجموعة جزئية مـــن $(A')'$ ومثالا أخر يوضح بان $A' \cap B'$ لا يشترط أن تكون مجموعة جزئية مـــن $(A \cap B)'$.

(2) برهن على أن $(\overline{A})' = A'$

(3) برهن على أن مجموعة كل الفترات المفتوحة في R تكون مجموعة قابله للعد، إذ كانت نقاط نهايتها أعداد نسبيه.

(4) برهن أن $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(5) برهن على أن $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

ثم اكتب مثالا لمجموعتين A,B بحيث:

$$\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$$

(6) يكون العنصر a ملاصقا للمجموعة A إذا وفقط إذا كان كل جوار للنقطة a يحتوي على عدد غير منته من عناصر المجموعة A.

(7) برهن على أن المجموعة المشتقة A' تكون مجموعة مغلقة مهما كانت A.

(8) برهن على أن $G \subset G'$ لكل مجموعة مفتوحة G.

(9) جد مجموعة العناصر الملاصقة لكل واحده من المجموعات آلاتية:

(i) $\left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n , m = 1 , 2 , 3 ,\ldots\ldots\ldots \ldots \right\}$

(ii) $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{m} : n , m = 1 , 2 , 3 ,\ldots\ldots\ldots .. \right\}$

(iii) $\left\{ 2^{-n} + 3^{-m} : n , m = 1 , 2 , 3 .... \right\}$

(10) برهن أن $\{ x \}$ مجموعة مغلقة لكل $x \in R$.

(11) برهن على أن اتحاد عدد من المجموعات الكثيفة بنفسها تكون مجموعة كثيفة بنفسها

(12) برهن أن A° ، $(\text{Ext}(A))$ مجموعات مفتوحة

(13) برهن أن المجموعة A تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كان $A = A^{\circ}$

(14) برهن أن نقاط الحدود لأي مجموعة عبارة عن مجموعة مغلقة.

(15) برهن على انه إذا كان c اصغر حد أعلى لمجموعة مثل A فان c أما أن يكون عنصرا من عناصر A أو يكون ملاصقا للمجموعة A مع العلم أن A مجموعة غير خالية.

(16) برهن على أن النقطة الملاصقة لأي مجموعة تكون أما نقطة حدود للمجموعة أو تكون نقطة داخلية لها.

(17) برهن على أن اتحاد أي مجموعتين محدودتين من الأعلى يكون مجموعة محدودة في الأعلى.

(18) برهن أن اتحاد عدد منته من المجموعات التامة يكون مجموعة تامة.

(19) إذا كانت $N = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ... \}$ وكانت T' معرفة بالشكل الأتي:

$$T' = \left\{ A_i : A_i = \{ i , i + 1 , i + 2 , ...\} , \forall i = 1 , 2 , 3 , ... \right\}$$

فبرهن أن $T = \phi \cup T'$ تمثل تبولوجي على المجموعة N.

(20) إذا كانت X أية مجموعة غير منتهيه وكانت T تمثل كل المجموعات التي تكون متمماتها منتهيه برهن أن T تكون تبولوجي للمجموعة X.

الباب الثالث

المجموعات المرصوصة والفضاء المتري
(Compact Sets and Metric Space)

1.3 المجموعات المفتوحة : OPEN SETS

يمكن توظيف مفاهيم اكبر حد أدنى واصغر حد أعلى في تحديد طبيعة المجموعات المفتوحة في R. وفيما يلي بعض المبرهنات التي تخص ذلك.

1.1.3 مبرهنة :

أية عائلة من الفترات المنفصلة تكون قابلة للعد.

البرهان:

لتكن μ عائلة من الفترات المنفصلة(*)، نختار من كل مجموعة أو فترة عدداً نسبياً وهذا ممكن بالاستناد إلى حقيقة (11.3.1).

تأمل وجود التناظر الأحادي الذي يقرن كل فتره بعدد نسبي وحيد (لأن الفترات منفصلة) وحيث أن مجموعة الأعداد النسبية، مجموعة قابلة للعد، وكذلك المجموعات الجزئية لمجموعة الأعداد النسبية، لذلك فأن مجموعة الفترات μ هي مجموعة قابلة للعد.

وبهذا يتم المطلوب.

(*) تعني الفترة هنا الفترات المفتوحة أو المغلقة أو غير المفتوحة وغير المغلقة والأشعة المغلقة والمفتوحة ولا يشترط أن تكون الفترات كلها من نوع واحد.

لقد مر بنا في البنود السابقة أن الفترة المفتوحة مثل (a,b) تكون مجموعة مفتوحة وكذلك اتحاد أي عائلة من الفترات المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة و الآن هل المجموعات المفتوحة تساوي اتحاد فترات مفتوحة ؟ هذا ما ستجيب عليه المبرهنات الآتية:

2.1.3 مبرهنة:
إذا كانت G أية مجموعة مفتوحة، فأن G عبارة عن اتحاد عدد منته أو قابل للعدد في الفترات المفتوحة.

البرهان:

سنفرض مع كل $x \in G$ الفترات $I_x \in G$ بالطريقة التالية:

لتكن I_x اتحاد كل الفترات I_j حيث $I_j = (a_j , b_j)$ أية مجموعة وكذلك $x \in I_j \subset G$ أو بكلام أخر:

$$I_x = \left\{ \bigcup_{j \in J} I_j : x \in I_j \subset G , I_j = (a_j , b_j) \right\}$$

إذا كان a , b يمثلان أكبر حد أدنى للمجموعة $\{ a_j \}$ وأصغر حد أعلى للمجموعة $\{ b_j \}$ لكل $j \in J$ فأن $I_x = (a , b)$ ، فإذا كان $y \geq b$ فإن $y \notin I_j$ لأي $j \in J$ وعلى هذا يكون $y \notin I_x$.

من جهة أخرى إذا كانت $y \in (a , b)$ فأنه يكون أما $y \in (a , b)$ بهذا تكون $y \in I_x$ وأما $x < y < b$ أو $a < y < x$

لنفرض أن $x < y < b$. حيث أن (b) هي أصغر حد أعلى للنقاط b_j لكل $j \in J$، إذن لابد من وجود j بحيث $y \in I_j$ لذلك فإن $y \in I_x$ بنفس الطريقة إذا كان $a < y < x$ فإن $y \in I_x$ وبهذا تكون I_x فترة مفتوحة.

وفيما يلي سنبرهن علــى أنــه إذا كانــت $x , y \in G$ فإمــا $I_x = I_y$ أو $I_x \cap I_y = \phi$ ولتوضيح ذلك نقــول، لــيكن $x \in I_x \cap I_y$ لــذلك فــأن $I_x \cap I_y$ فترة مفتوحة وحيث أن $x \in I_x \cup I_y$ لذلك $I_x \cup I_y \subset I_x$ (تعريف I_x) وحيث أن $y \in I_x \cup I_y$

كذلك فأن : $I_x \cup I_y \subset I_y$

ولذلك فأن $I_x \cup I_y = I_x = I_y$.

وبهذا برهنا على أن G هي إتحاد عائلة من الفترات المفتوحة المنفصلة أي أن:

$$G = \bigcup_{\forall x \in G} I_x$$

وحسب نظرية (1.1.3) تكون هذه العائلة من المجموعات قابلة للعـــد.

وبهذا يتم المطلوب.

3.1.3 نتيجة:

كل مجموعة مغلقة عبارة عن مكملة لعدد منته أو عدد قابــل للعد من الفترات المفتوحة المنفصلة.

2.3 متتابعات المجموعات المغلقة (Sequences of Closed Sets) :

1.2.3 تمهيد:

لتكن μ عائلة من المجموعات المغلقة، فإذا كانت μ منتهيــة فــيمكن كتابــة عناصرها بالشكل $F_1 , F_2 , \ldots , F_n$ أما إذا كانت μ غير منتهية وأمكن وضعها

في تناظر واحد و واحد مع مجموعة الأعداد الطبيعية { ...... 3 , 2 , 1 } فيمكن كتابتها بالصورة التالية:

$$\mu = \{ A_1 , A_2 , A_3 , ... \}$$

أو بالصورة المختصرة الآتية

$$\mu = \{ A_n \}$$

حيث n عدد طبيعي.

يقال لعائلة المجموعات μ غير المنتهية والتي يمكن وضعها في تناظر واحد لواحد مع عناصر المجموعة { ...... 3 , 2 , 1 } متتابعة مجموعات . (A sequence of Sets)

2.2.3 تعريف

إذا كانت $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة مجموعات تحقق الخاصية الآتية:

$A_n \supset A_{n+1}$ لكل {......1,2,3} فإنها تسمى متتابعة تنازلية (Decreasing Sequence).

3.2.3 مبرهنة:

إذا كانت $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة تنازلية من المجموعات المحدودة والمغلقة وغير الخالية فإن المجموعة $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ تكون غير خالية.

البرهان:

باستخدام مسلّمة الكمال نستطيع إيجاد عدد مثل x_n بحيث أن $x_n = \max F_n$ لكل n=1,2,3,... ، $x_n \in F_n$ (أيضاً x_n هو أصغر حد أعلى للمجموعة F_n وهو ينتمي إلى F_n لأن F_n مغلقة).

وحيث أن $F_{n+1} \subset F_n$ بالفرض لذلك يكون $x_{n+1} \leq x_n$ لكل n وكذلك لكل عدد طبيعي q يكون $x_n \in F_q$ لكل $n > q$.

دعنا نرمز لمجموعة الأعداد $\{x_1, x_2, ...\}$ بالرمز T .

حيث أن $T \subset F_1$ و F_1 محدودة بالفرض وتكون T محدودة (لأنها مجموعة جزئية من مجموعة محدودة).

وبصورة خاصة تكون محدودة من الأسفل. وباستخدام مسلّمة الكمال مرة أخرى نستطيع أن نجد عدد مثل c يمثل أكبر حد أدنى للمجموعة T ونحاول أثبات أن $c \in F_n$ لكل n وبهذا يكون التقاطع لهذه المجموعات غير خال.

ليكن q يمثل أي عدد طبيعي موجب، تأمل المجموعة الجزئية T_q من T . المعرفة كالأتي:

$$T_q = \{x_n : n > q\}$$

وحيث أن c هو اكبر حد أدنى للمجموعة T لذلك فهو أكبر حد أدنى للمجموعة T_q أيضا، وحيث أن أكبر حد أدنى لأية مجموعة يكون أما عنصراً فيها أو ملاصقاً لها، لذلك فأن:

$c \in T_q$ ولما كان $T_q \subset F_q$ لذلك فأن $T_q \subset F_q$ وحيث أن F_q مغلقة يكون $T_q \subset F_q$ وكنتيجة يكون $c \in F_q$ وعليه يكون c في كل F_q مهما كانت q .

$$\therefore c \in \bigcap_{q=1}^{\infty} F_q$$

أي أن

$$F = \bigcap_{q=1}^{\infty} F_q \neq \phi$$

وبهذا يتم البرهان.

4.2.3 ملاحظة:

أن الشروط المفروضه على $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ في المبرهنة الـــسابقة أساســـية وأن أي منها تصبح المبرهنة غير صحيحة . وفيما يلي أمثلة توضح ذلك.

5.2.3 مثال:

إذا كانت $F_n = \phi$ لواحدة من المجموعات $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ فإن :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \phi$$

وحتى إذا كانت F_n مغلقة لكل n ومحدودة وتناقصية فأن فرض أن F_n خالية جعل المبرهنة غير صحيحة .

6.2.3 مثال:

لتكن $F_n = \{x : x \geq n\}$ لكل عدد طبيعي n حيث $n = 1, 2, 3$

لذلك سيكون $F_{n+1} \subset F_n$ ، مغلقة وغير خالية كما نلاحظ، لكن:

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \phi$$

وبهذا يتضح أن فقدان الشرط بان كل F_n محدوده يؤدي إلي عدم صحة المبرهنة فلذلك شرط كون F_n محدوده لكل n شرط أساسي.

7.2.3 **مثال:**

لتكن $F_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ نلاحظ أن المتتابعة $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة تناقصية وكل عنصر فيها محدود وغير خال ولكن:

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \phi$$

لذالك فان فقدان الشرط يكون F_n مغلقة لكل n جعل المبرهنة غير صحيحة.

8.2.3 **مثال:**

لتكن $F_n = [2n, 2n+1]$ لاحظ أن كل عنصر من عناصر المتتابعة $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ مغلقة ومحدود وغير خال ولكن المتتابعة $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ ليست تنازلية. لاحظ أن

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \phi$$

ولذلك فشرط $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ تنازلية شرط أساسي لبرهنة النظرية.

3.3 غطاء المجموعة: (Covering of a Set)

1.3.3 **تعريف:**

لتكن μ عائلة من المجموعات الجزئية الأعداد الحقيقة يقال للعائلة μ أنها غطاء للمجموعة A إذا وفقط إذا كان كل عنصر من عناصر A محتوياً في مجموعة واحدة على الأقل من مجموعات العائلة μ.

أو تكون عائلة المجموعات μ غطاء للمجموعـــة A إذا وفقـــط إذا كانـــت A مجموعة جزئية من اتحاد جميع عناصر μ أي $A \subset \bigcup_{A\alpha \in \mu} A_\alpha$ وســـيكون اهتمامنـــا منصبا بشكل خاص على الغطاء الذي تكون كل مجموعاته مجموعات مفتوحة.

2.3.3 تعريف:
يسمى الغطاء μ غطاء مفتوحاً (Open Cover) للمجموعة A إذا كان كل عنصر من عناصره مجموعة مفتوحة.

3.3.3 تعريف:
لتكن $F_n = [-n, n]$ متتابعة من المجموعـــات المغلقـــة نلاحـــظ أن $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = R$ فلذلك $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ تكون غطاء لمجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها.

4.3.3 تعريف:
لـــتكن $A = (0,1)$ ولـــتكن $\mu = \left\{ A_n : A_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right) \right\}$ لكـــل n حيـــث $n = 2,3,4,.......$ عائلة الفترات المفتوحة μ هي غطاء مفتوح للمجموعة $(0,1)$ أو أية مجموعة جزئية فها.

5.3.3 مثال:

لتكن Q مجموعة الأعداد النسبية ولتكن μ معرفة كما يأتي:

$$\mu = \{N(x,\varepsilon) : x \in Q, \varepsilon > 0\}$$

نلاحظ أن μ غطاء مفتوح للمجموعة Q.

6.3.3 مثال:

لتكن $A = (1,3)$ ولتكن μ معرفة كما يأتي:

$$\mu = \{(0,2),(1,2),(2,3),(2,4),(1,4)\}$$

من السهولة ملاحظة أن μ غطاء مفتوح للمجموعة A ويمكن ملاحظة أن $\{(0,1),(2,4)\}$ غطاء أيضا. وهو مجموعة جزئية من μ وكذلك $\{(1,2),(2,4)\}$ غطاء جزئي أخر للمجموعة A وهو غطاء مفتوح أيضا.

7.3.3 تعريف:

إذا كان μ غطاء للمجموعة A وكان Δ غطاء أخر لها بحيث $\Delta \subset \mu$ فيقال للغطاء Δ انه غطاء جزئي للمجوعة A (Subcover of A).

8.3.3 تعريف:

تكون المجموعة A مرصوصة (Compact) إذا وفقط إذا كان لكل غطاء مفتوح μ للمجموعة A،

يوجد غطاء جزئي منته لها (Finite Open Subcover).

أن مفهوم المجموعة المرصوصة ليس مفهوماً بسيطاً إذا انه يتطلب أيجاد غطاء جزئي منته لكل غطاء للمجموعة المعلومة.

فلأجل التقدير بان المجموعة A مرصوصة علينا أن نجرب كل الغطاءات المفتوحة الممكنة للمجموعة A ثم نجد غطاء جزئياً مفتوحاً لكل واحد منها وهذا أن لم يكن مستحيلاً فهو صعب جداً.

أن أثبات عدم الرص لمجموعة ما، هو أيسر بكثير من إثباتها مرصوصة، فيكفي أثبات عدم وجود غطاء جزئي منته ومفتوح لغطاء واحد لها، ليبرهن عدم الرص لتلك المجموعة، كما سيتضح ذلك في الأمثلة اللاحقة.

ولما مفهوم الرص (Compactness) والمجموعات المرصوصة من أهمية بالغة في موضوع التحليل الرياضي وخاصة فيما يتعلق بالاستمرار والاستمرار المنتظم، سنحاول أيجاد صيغ مكافئة للتعريف (8.3.3) تساعدنا على تميز المجموعات المرصوصة وتعطينا أهم خواصها المميزة.

9.3.3 مثال:

لتكن $A=(0,1)$ وليكن μ معرفاً كما يلي:

$$\mu = \left\{ A_n : A_n = \left(\frac{1}{n}, 1 \right), n = 1.2.3 .... \right\}$$

من الواضح أن μ غطاء مفتوح غير منته للمجموعة A. ولو حاولنا اخذ مجموعة منتهيه من μ مثل:

$$\mu' = \left\{ \left(\frac{1}{n_1}, 1 \right), \left(\frac{1}{n_2}, 1 \right), \left(\frac{1}{n_3}, 1 \right), ..., \left(\frac{1}{n_m}, 1 \right) \right\}$$

وفرضنا أن

$$\frac{1}{n} = \min \left\{ \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, ..., \frac{1}{n_m} \right\}$$

سنلاحظ بسهولة أن الفترة $\left(0, \frac{1}{n} \right)$ غير مغطاة بعناصر μ' وهذا يوضح عدم إمكانية تغطية A بأي عائلة من المجموعات المنتمية إلى المجموعات μ إذا كان عددها منتهياً، وهذا يعني أن A مجموعة غير مرصوصة(Not Compact).

سنبرهن فيما يلي بعض المبرهنات التي تعطينا سمات المجموعات المرصوصة وتساعدنا على تميزها.

10.3.3 مبرهنة (لندلوف Lindelof):

إذا كان μ غطاء مفتوح للمجموعة A فانه يوجد غطاء جزئي قابل للعد يغطي المجموعة A أيضاً.

البرهان:

ليكن μ غطاء للمجموعة A.

وليكن $a \in A$ أذن $a \in G_a$ حيث $G_a \in \mu$ (لأن $A \subset \cup G_a$).

ولما كانت G_a مجموعة مفتوحة، أذن لابد من وجود $N(a,\varepsilon)$ بحيث $N(a,\varepsilon) \subset G_a$ بكلام أخر توجد فتره $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ بحيث أن $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \varepsilon G_a$. دعنا الآن نختار عددين نسبيين مثل a_2, a_1 بحيث أن:

$$a-\varepsilon < \alpha_1 < a < \alpha_2 < a+\varepsilon$$

هذا ممكن لأننا سلمنا بوجود عدد نسبي بين أي عددين حقيقيين.

وبنا على ما مر ستكون الفترة $I_a = (\alpha_1, \alpha_2)$ مجموعة جزئية من المجموعة G_a أي أن: $a \in I_a \subset G_a$

بهذا الطريقة نستطيع أن نقرن مع كل عنصر من عناصر المجموعة A فترة مفتوحة I_a، نقطتا نهايتها عددين نسبيين، وحيث أن عائلة الفترات المفتوحة التي تكون نقطتا النهاية لها أعداد نسبية هي مجموعة قابلة للعد، لذلك فالمجموعة:

$$B = \{I_a, \forall_a \in A\}$$

مجموعة قابلة للعد وحيث أن I_a محتواة في واحدة على الأقل من مجموعات μ لذا فنستطيع اختيار مجموعة واحدة فقط من عناصر μ تحتوي على I_a لمجموعة جزئية بهذه الطريقة اخترنا مجموعة جزئية μ' من الغطاء μ لها الخاصية الآتية:

لكل عنصر $I_a \in B$ هنالك مجموعة واحدة فقط G'_a تنتمي إلى μ' بحيث $I_a \subset G'_a$. وحيث أن B قابلة للعد تكون μ' قابلة للعد أيضا. وحيث أن:

$$a \in I_a \subset G'_a$$

لكل $a \in A$ لذا فان μ' غطاء مفتوح وقابل للعد للمجموعة A.

وبهذا يتم المطلوب.

11.3.3 مبرهنة (هايني- بوريل) (Heine-Borel):

كل مجموعة محدودة ومغلقة تكون مرصوصة.

البرهان:

لتكن A مجموعة محدودة ومغلقة ولتكن μ أي غطاء مفتوح للمجموعة A بالاستفادة من مبرهنة (10.3.3) نستطيع أيجاد مجموعة جزئية من μ قابلة للعد تغطي A ولتكن هذه المجموعة: $\mu' = \{G_1, G_2, G_3, \ldots\ldots \quad \ldots\}$

حيث $\mu' \subset \mu$. دعنا نعرف المجموعات $K_1, K_2, K_3, \ldots\ldots$

بالطريقة آلاتية:

$$G_1 \cup G_2 \cup G_3 = K_3, G_1 \cup G_2 = K_2, G_1 = K_1$$

وبصورة عامة فان:

$$K_n = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$$

وهكذا لاحظ أن K_1, K_2, k_3........ مجموعات مفتوحة لأنها اتحاد لمجموعات مفتوحة ولتكن المجموعات L_1, L_2, L_3...... معرفة كالأتي:

$$L_3 = K_3^c \cap A, L_2 = k_2^c \cap A, L_1 = K_1^c \cap A$$

وبصورة عامة:

$$L_n = K_n^c \cap A, \forall n = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

لاحظ أن L_1, L_2, L_3,.......... مجموعات مغلقة، لان K_n^c مجموعة مغلقة، وان A مجموعة مغلقة بالفرض و $(K_n^c \cap A)$ مجموعة مغلقة، فلذلك فان L_n مغلقة لكل $n = 1,2,3,\ldots\ldots$ كذلك فان كل مجموعة L_n تكون محدودة لكل $n \in N$.

نلاحظ كذلك ومن تعريف K_1, K_2, K_3,...... أن $K_n \subset k_{n+1}$ لكل $n = 1,2,3,\ldots\ldots.$ لذلك يمكن استنتاج أن:

$$L_{n+1} \subset L_n, \ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots \ \ldots, L_3 \subset L_2, L_2 \subset L_1$$

وعلى هذا فان المتتابعة $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة مجموعات محدودة ومغلقة وتنازلية، فإذا فرضنا أن $L_n \neq \phi$ لكل $n \in N$ فان شرط نظرية (3.2.3) متوفرة جميعاً وعليه يكون:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} L_n \neq \phi$$

نفرض أن $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n$، إذن $c \in L_n$ لكل $n = 1,2,3$ وحيث أن $L_n = K_n^c \cap A$ لهذا يكون $c \in A$ و $c \in K_n^c$ لكل $n \in N$ لذلك فان $c \notin K_n$ لكل $n = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots$ وهذا يعني أن $c \notin G_1$ و $c \notin G_2$ و $c \notin G_3$ وبصورة عامة فان $c \notin G_n$ لكل $n \in N$ ينتج من هذا أن $c \in A$ ولا توجد مجموعة من مجموعات μ' تحتوي النقطة c وهذا يعني أن μ' لا تغطي A.

وهذا يناقض الفرض، ولهذا تكون فرضيتنا بكون $L_n \neq \phi$ لكل $n \in N$ غير صحيحة، وهذا يقضي بوجود مجموعة واحدة مثل L_q بحيث $L_q = \phi$ أي أن $L_q = K_q^c \bigcap A = \phi$ وهذا يعني أن $A \subset K_q$ إذن $A \subset \bigcup_{i=1}^{q} G_i$ وهذا يؤدي إلى أن A يمكن تغطيتها بعدد منته من المجموعات التي تنتمي إلي μ، إذن A مجموعة مرصوصة.

وبهذا يتم المطلوب.

12.3.3 ملاحظة:

سبق وان لاحظنا أن مثال (9.3.3) أن المجموعة A كانت مفتوحة وكان μ غطاء مفتوحاً ولم نتمكن من اخذ أي مجموعة جزئية منتهية منه

تصلح أن تكون غطاء للمجموعة A لهذا فشرط كون A مغلقة شرط أساسي وبدونه تصبح النظرية غير صحيحة.

13.3.3 مثال:

لتكن $A = \{x : x > 0\}$ ولتكن μ معرفة كالأتي:

$\mu = \{(n-1, n+1), n = 1,2,3,........\}$. من السهولة ملاحظة أن μ غطاء مفتوح للمجموعة A وانه لا يمكن اختزاله إلي مجموعة منتهيه تغطي A.

فلو فرضنا أن عدد منتهيا في مجموعات μ تغطي A لوجدنا أن عددا مثل w يكون موجوداً وان جميع النقاط x بحيث $x > w$ ليست مغطاة بعناصر هذه المجموعة المنتهية.

14.3.3 مبرهنة (عكس مبرهنة هايني – بوريل)

كل مجموعة مرصوصة تكون محدودة ومغلقة

البرهان:

لتكن μ عائلة من المجموعات المفتوحة G_n حيث:

$$\mu = \{G_n : G_n = (-n, n), n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$$

من الواضح أن μ مجموعة غير منتهية من المجموعات (الفترات المفتوحة) وان μ تغطي مجموعة الأعداد الحقيقية R. لذلك فان μ غطاء مفتوح لكل مجموعة جزئية من R. وعليه فان μ هي غطاء مفتوح للمجموعة A، وحيث أن A مرصوصة لذلك يوجد غطاء جزئي منته للمجموعة A وليكن μ'.

إذن: $\mu' = \{(-n_1, n_1), (-n_2, n_2), \ldots\ldots\ldots, (-n_q, n_q)\}$

لنفرض أن $w = \max(n_1, n_2, \ldots\ldots\ldots..)$ لذلك سيكون:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{q} (-n, n) = (-w, w)$$

إذن $A \subset (-w, w)$ وهذا يعني أن كل $x \in A$ تحقق $-w < x < w$ وبهذا برهنا على أن كل مجموعة مرصوصة تكون محدودة.

علينا ألان برهنة أن A مجموعة مغلقة.

سنأخذ نقطة مثل c لا تنتمي إلي A وتحاول البرهنة على أنها ليست عنصرا ملاصقاً للمجموعة A، وهذا يعني أن A تحوي كل عناصرها الملاصقة أي أن A مغلقة.

لتكن $c \in A$ لاحظ عائلة المجموعات:

$$F_3 = \left[c - \frac{1}{3}, c + \frac{1}{3}\right], F_2 = \left[c - \frac{1}{2}, c + \frac{1}{2}\right], F_1 = [c - 1, c + 1]$$

وبصورة عامة:

$$F_n = \left[c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}\right]$$

وهكذا. لاحظ أن $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \phi$ ، نفرض أن:

$$H_3 = F_3^c , H_2 = F_2^c , H_1 = F_1^c$$

وبصورة عامة $H_n = F_n^c$ ، المجموعات H_3, H_2, H_1 مجموعات مفتوحة وحيث أن:

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i\right)^c = \{c\}^c = R \setminus \{c\}, \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \{c\}$$

$$R \setminus \{C\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i , R \setminus \{C\} = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i\right)^c = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i\right)$$

وحيث أن $c \notin A$ لذلك تكون العائلة $H_1, H_2, ...$ غطاء للمجموعة A ولما كانت مرصوصة فلذلك يوجد غطاء جزئي مثـــل $\{H_{n1}, H_{n_2}, ..., H_{n_q}\}$ يغطـــي المجموعة A.

لو فرضنا بان:

$$W = \max\left(n_1, n_2, n_3, ..., n_q\right)$$

ولذلك فان آية نقطة من نقاط A تكون موجودة في على الأقل مجموعة واحـــدة من المجموعات $\{h_1, h_2, h_3, ..., h_w\}$ وعلى هذا الأساس لا توجد نقطة من نقاط A تنتمي إلي المجموعة

$$F_n = \left[c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}\right]$$

من هذا نستنتج أن c ليست عنصراً ملاصقاً للمجموعة A. وبهذا برهنا أن أيـــة نقطة مثل $c \notin A$ لا تكون عنصراً ملاصقاً ألي A وهذا يعني أن كـــل العناصـــر الملاصقة للمجموعة A تنتمي إلي A.

أي أن A مجموعة مغلقة.

وبهذا برهنا أن المجموعة المرصوصة تكون محدودة ومغلقة. وبهذا يتم البرهان.

15.3.3 ملاحظة:

تكون المجموعة مرصوصة إذا وفقط إذا كانت مغلقة ومحدودة، وبهذا توصلنا إلي صيغة سهلة لتمييز المجموعات المرصوصة عن غيرها فالمجموعات $[3,5]$, $[0,1]$, $[0,1] \cup \{2,3,4\}$, $\{1,2,3,4,5\}$ كلها مجموعات مرصوصة لان كل واحدة منها محدودة ومغلقة.

أما المجموعات $(0,1)$, $(-1,1)$, R_1, $\{x : x > 1\}$ فهي ليست مرصوصة لأنها أما ليست مغلقة أو ليست محدودة.

> **16.3.3 مبرهنة (بولزانو- فيراشتراس Bolzano-Weirstrass)**
> كل مجموعة غير منتهيه ومحدودة تمتلك عنصراً ملاصقاً.

البرهان:

لتكن A مجموعة غير منتهيه ومحدودة. إذا فرضنا أن A لا تمتلك عنصراً ملاصقاً سيترتب على هذا الفرض نتيجتان هما أن A مغلقة وان عناصر A عبارة عن نقاط معزولة، وهذا يعني أن لكل $x \in A$ جوار مثل $N(x,\varepsilon)$ لا يحوي غير النقطة x من نقاط A، أو $N(x,\varepsilon) \cap A \neq \phi$.

لتكن μ تمثل جميع جوارات نقط A والتي لا تحتوي نقاطاً أخرى من A سيكون μ غطاء مفتوحاً للمجموعة A وحيث A مغلقة ومحدودة لذلك فهي مجموعة مرصوصة، وعلى هذا فيوجد غطاء جزئي μ' يغطي A ويكون منتهياً

أي:

$$\mu' = \{N(x_1, \varepsilon_1), N(x_2, \varepsilon_2), \ldots\ldots, \quad N(x_n, \varepsilon_n)\}$$

وحيث أن كل جوار من جوارات μ' يحتوي على نقطة واحدة فقط من نقاط A، يعني ذلك أن نقاط A تكون مجموعة منتهيه وهذا يناقض الفرض بأن A مجموعة غير منتهيه وعلى هذا يكون افتراضنا أن A لا تمتلك عنصراً ملاصقاً افتراض غير صحيح، لذلك فان A تمتلك عنصراً ملاصقاً على الأقل. يتم البرهان.

17.3.3 مبرهنة :

تكون المجموعة مرصوصة إذا وفقط إذا كان لكل مجموعة جزئية غير منتهيه منها، عنصر ملاصق ينتمي إلي تلك المجموعة.

البرهان:

لتكن A مجموعة مرصوصة، لذلك فان A محدودة ومغلقة (مبرهنة 14.3.3) وحيث أن A محدودة لذلك تكون كل مجموعة جزئية منها محدودة ايضا. وحسب مبرهنة (بولزانو- فيرشتراس) يكون لهذه المجموعة الجزئية المحدودة غير المنتهية عنصر ملاصق مثل a وتكون النقطة a ملاصقة للمجموعة A ايضا.

وبما أن A مغلقة بالفرض، إذن تكون $a \in A$ وبهذا يتم البرهان بالاتجاه الأول.

لنبرهن المبرهنة بالاتجاه الثاني وهو :إذا كان لكل مجموعة جزئية للمجموعة A عنصراً ملاصق ينتمي إلى A فان A تكون مرصوصة.

لأجل البرهان نفرض أن A غير محدودة، فإذا اخذ العدد (1) استطعنا إيجاد عنصر مثل $x_1 \in A$ بحيث $x_1 > 1$ و ألا كانت A محدودة، ولو اعتبرنا $x_1 + 1$

عدداً حقيقياً فان عنصراً مثل x_2 يكون موجوداً في A بحيث $x_2 > x_1 + 1$ (لأن A غير محدودة)، وهكذا نستطيع تعريف العنصر x_n ونأخذ العدد $x_n + 1$ ونقول لابد من وجود x_{n+1} في A بحيث $x_{n+1} > x_n + 1$ وبهذه الطريقة عرفنا المجموعة $B = \{x_n : x_n \in A, n \in N\}$ غير منتهية وهي كما نلاحظ مجموعة جزئية من A.

أن عناصر المجموعة B عناصر معزولة والبعد بين أي عنصر والذي يليه اكبر من واحد ولذلك فان أي جوار لأية نقطة تنتمي إلى B أو لا تنتمي أليها ونصف قطره اقل من (1) لا يمكن أن يحتوي على أكثر من نقطة واحدة من نقاط B. ومن الواضح انه بالا مكان أيجاد جوار x و $N^*(x,\varepsilon)$ بحيث $N^*(x,\varepsilon) \cap B = \phi$ هذا يعني أن المجموعة B لا تمتلك عنصراً ملاصقاً، وهذا يناقض الفرض، وعلى هذا فان اقترضنا بان المجموعة A غير محدودة افتراض غير صحيح ولذلك فان A يجب أن تكون محدودة.

ولأجل البرهنة على أن A مغلقة، نفرض أن c عنصر ملاصق للمجموعة A، ولتكن المجموعة B معرفة كالأتي:

$$B = \left\{ y_n, |y_n - c| < \frac{1}{n}, (n = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots), y_n \in A \right\}$$

وعلى هذا تكون B مجموعة جزئية من A وهي غير منتهيه وان c عنصر ملاصق لها. لذلك $c \in B$ (حسب معطيات المبرهنة).

أن المجموعة B لا ملاصق لها غير c فلو كان b ملاصق أخر للمجموعة B لكان $|b-c|$ عدداً حقيقياً موجبا. نختار عدداً طبيعيا مثل n بحيث $\frac{1}{n} < \frac{1}{2}|b-c|$ لذلك سيكون:

$$|y_n - c| < \frac{1}{2}|b - c|$$

ولكن

$$|b-c-(y_n-c)| \geq |b-c|-|y_n-c|$$

$$\therefore |y_n-b| \geq |b-c|-|y_n-c| > \frac{1}{2}|b-c|$$

$$\therefore |y_n-b| > \frac{1}{2}|b-c|$$

وهذا يعني إن عدداً منتهيا فقط من عناصر B يكون موجوداً في $N\left(b,\frac{1}{2}|b-c|\right)$ ولذلك يمكن الحصول على جوار محذوف للنقطة b مثل $N^*(b,\varepsilon)$ لا يحتوي على أية نقطة من نقاط B وهذا يعني أن b لا يكون عنصرا ملاصقا للمجموعة B وان c هو العنصر الملاصق الوحيد للمجموعة B وبهذا يتم المطلوب.

4.3 الفضاء المتري Metric Spac

1.4.3 ملاحظة

أننا استخدمنا فكرة جوار النقطة فيما درسناه وبرهناه عن المجموعات المفتوحة والمغلقة والمرصوصة في مجموعة الأعداد الحقيقية.

فبواسطته عرفت المجموعة المغلقة والمفتوحة وكان حجر الأساس في بناء وبرهنة كل المبرهنات المتعلقة بتقاطع واتحاد المجموعات المغلقة والمفتوحة والمرصوصة، وعند أمعان النظر في هذا المفهوم نجد انه يعتمد على فكرة النقاط القريبة من نقطة معينة أي يعتمد على مفهوم أخر هو مفهوم المسافة بين نقطتين.

فجوار النقطة a هو كل النقاط التي تبعد عن a مسافة تقل عن عـــدد حقيقـــي موجب ε أي أن :

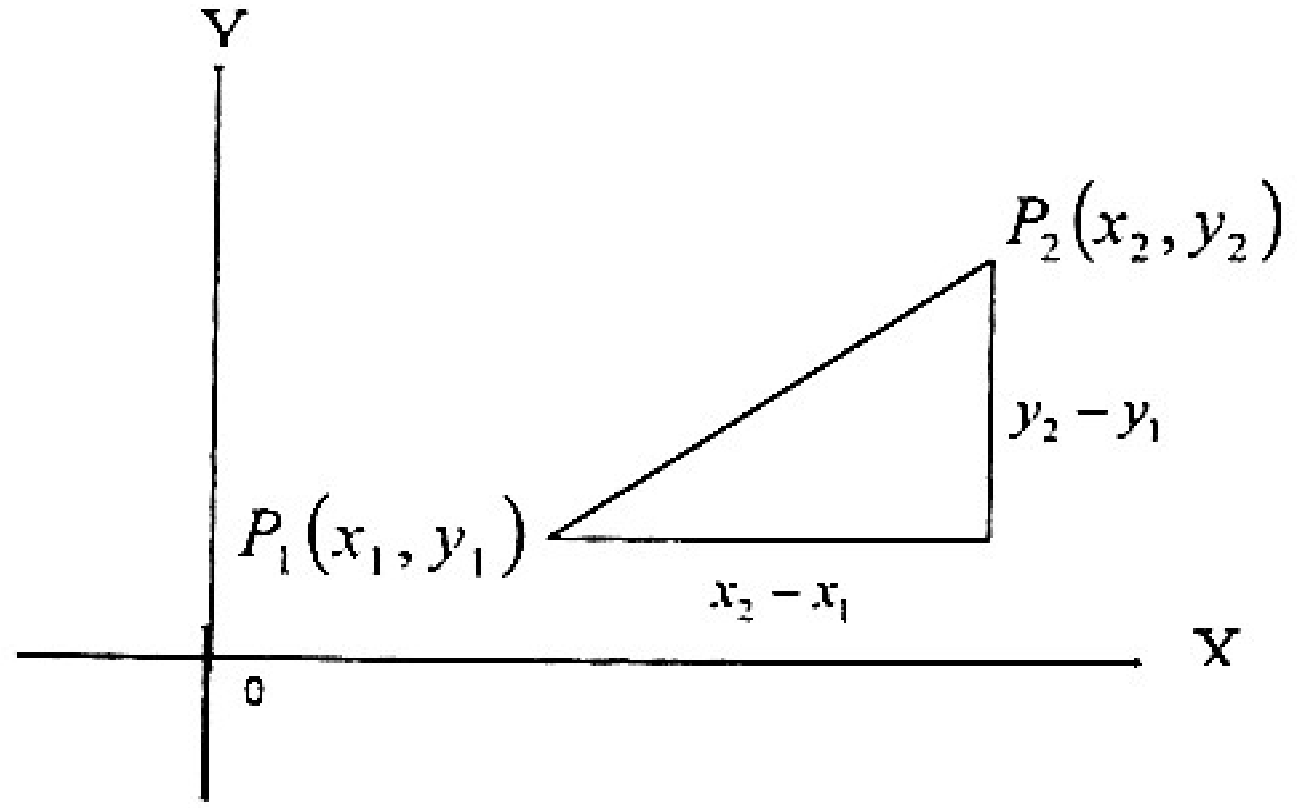
$$N(a,\varepsilon)=\{x:|x-a|<\varepsilon\}$$

أن فكرة أو مفهوم المسافة مفهوم نسبي وقد ينظر إلية من زاويا مختلفة وهـــذه بعض الأمثلة توضح ذلك:

مثال: 2.4.3

لتكن النقطتان $p_1(x_1,y_1),p_2(x_2,y_2)$ أي نقطتين في المستوي الأقليـــدي R^2 فالمسافة بين p_2,p_1 تعطي بالقانون الأتي:

$$D(p_1,p_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

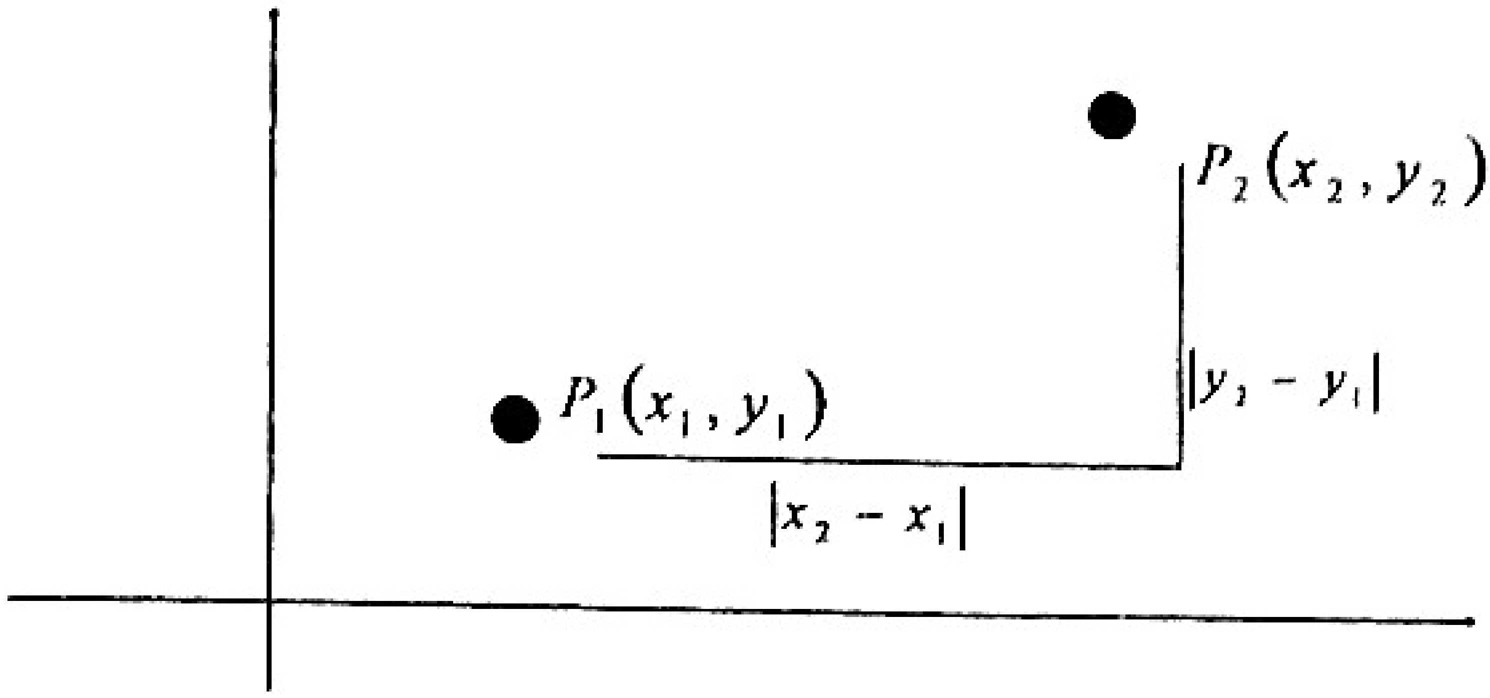


اعتمادا على نظرية فيثاغورس لذلك يعرف العدد $D(p_1,p_2)$ بالبعد الفيثاغورس بين p_2,p_1.

3.4.3 مثال:

لتكن p_1, p_2 . أي نقطتين في المستوي الأقليدي R^2 وان:

$$D_1(p_1, p_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$



لو تصورنا أن p_1 تمثل موقعاً في مدينة شوارعها مستقيمة ومتعامدة و p_2 تمثل موقعا أخر في المدينة نفسها، فلو أراد سائق سيارة أجرة التوجه من موقع p_1 إلي الموقع p_2 مستخدما الطريقة الأقصر لسجل عداد السيارة المسافة $D_1(p_1, p_2)$ والتي تساوي:

$$D_1(p_1, p_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

وهذه نظرة ثانية للمسافة بين نقطتين.

4.4.3 مثال:

إذا كانت $p_1, p_2 \in R^2$ نقطتين وكانت المسافة بينهما معرفة كالأتي:

$$D_2(p_1, p_2) = \max\{\ |x_2 - x_1| \text{ ، } |y_2 - y_1|\ \}$$

فالمسافة بين p_1 , p_2 هي اكبر قيمة مطلقة لفرق إحداثيات النقطتين، عندما نحلل ما تضمنته النظريات السابقة للمسافة نجد أنها تشترك بصفات

معينة، سنحاول تحديد هذه الصفات وتقديم تعريفاً للمسافة ينطبق على وجهات النظر السابقة جميعاً وعلى أي وجهات نظر (تعاريف) للبعد بين نقطتين.

لاشك انك لاحظت بان المسافة بين أي نقطتين عبارة عن عدد حقيقي وحيد يقرن مع كل زوج من النقاط، لذلك فان المسافة بين نقطتين بصورة عامة دالة تقرن كل زوج من نقاط مجموعة بعدد حقيقي وحيد، تسمى هذه الدالة بالدالة المترية (المسافية) (Metric function).

5.4.3 تعريف: الفضاء المتري (Metric Space)

لتكن X أية مجموعة وليكن d داله مترية (مسافية) أي:

$$d : X \times X \to R$$

يحقق الشروط الاتية:

(1) $d(x,y) \geq 0$ لكل $x,y \in X$

(2) $d(x,y) = d(y,x)$

(3) $d(x,y) = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = y$

(4) لكل $x,y,z \in X$ يكون: $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

يسمى الزوج (X,d) بالفضاء المتري

6.4.3 **مثال:**

لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية و d معرفة بالشكل الأتي لكل $x,y \in R$ يكون $d(x,y) = |x - y|$

نلاحظ أن:

(1) $d(x,y) \geq 0$ لأن $|x-y| \geq 0$

(2) بما أن $|x-y| = |y-x|$ لذلك فان $d(x,y) = d(y,x)$

(3) إذا كان $d(x,y) = 0$ أي $|x-y| = 0$ يكون $x = y$

ولعكس إذا كان $y = x$ فان $|x-y| = 0$ أي $d(x,y) = 0$

(4) نعلم أن:

$$|x-z| = |x-y+y-z|$$

ولكن $|x-z| = |x-y+y-z| \leq |x-y| + |y-z|$

أي أن $|x-y| + |y-z| \geq |x-z|$

$$\therefore d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$$

بهذا أثبتنا أن (R,d) فضاء متري.

7.4.3 مثال

إذا كانت $X = R^2$ والمسافة بين نقطتين معرفة بالشكل الآتي:

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

فإن:

(1) حيث أن $(x_2-x_1)^2, (y_2-y_1)^2$ كميات اكبر من أو تساوي الصفر فان:

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \geq 0$$

(2) بما أن

$$(y_2-y_1)^2 = (y_1-y_2)^2, (x_1-x_2)^2 = (x_2-x_1)^2$$

لذلك فان:

$$d\left((x_2, y_2),(x_1, y_1)\right) = d\left((x_1, y_1),(x_2, y_2)\right)$$

(3) إذا كانت $d\left((x_1, y_1),(x_2, y_2)\right)=0$ سيكون:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 0$$

وعليه يكون

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 0$$

لذلك لابد أن يكون $(x_2 - x_1)^2 = 0$ و $(y_2 - y_1)^2 = 0$ ومنه يكون

$y_2 = y_1, x_2 = x_1$ ، إذن تكون النقطتان:

$$(x_2, y_2) = (x_1, y_1)$$

وبالعكس إذا كانت $(x_2, y_2) = (x_1, y_1)$ يكون:

$$y_2 = y_1, x_2 = x_1$$

ومنه $(x_2 - x_1) = 0$ و $(y_2 - y_1) = 0$ إذن

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 0$$

ولذلك فان

$$d\left((x_1, y_1),(x_2, y_2)\right) = 0$$

(4) لما يتضمنه هذا الجزء من عمل لمطول سنتركه تمريناً للطالب.

8.4.3 ملاحظة:

يعرف البعد المتري المعرف على R^2 بالبعد الفيثاغورسي بين نقطتين في كل واحدة من ما يأتي:

$$D_1((x_1, y_1),(x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_{11}| \quad (1)$$

$$D_2((x_1, y_1),(x_2, y_2)) = \max(|x_2 - x_1|,|y_2 - y_1|) \quad (2)$$

$$D_3((x_1, y_1),(x_2, y_2)) = \begin{cases} 0 & if (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \\ 1 & if (x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \end{cases} \quad (3)$$

وسنترك للطالب البرهنة على أن $(R^2, D_1),(R^2, D_2),(R^2, D_3)$ تكون فضاء مترياً.

9.4.3 ملاحظة:

سنتناول النقاط التي تكون على بعد معين من نقطة ثابتة أو النقاط التي لا يزيد بعدها عن نقطة معينة عن عدد حقيقي معين. وكما نتذكر أن هذه المجموعة من النقاط كنا نطلق عليها جوار نقطة.

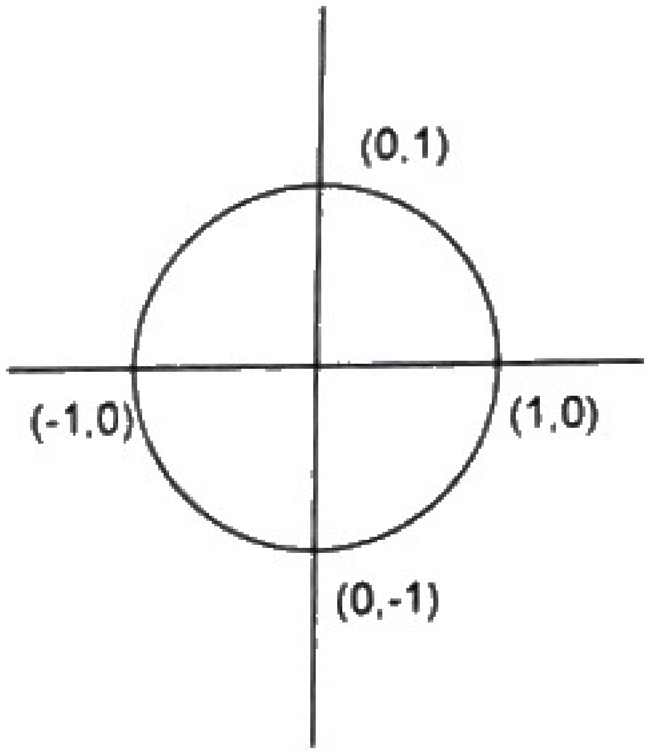
10.4.3 تعريف:

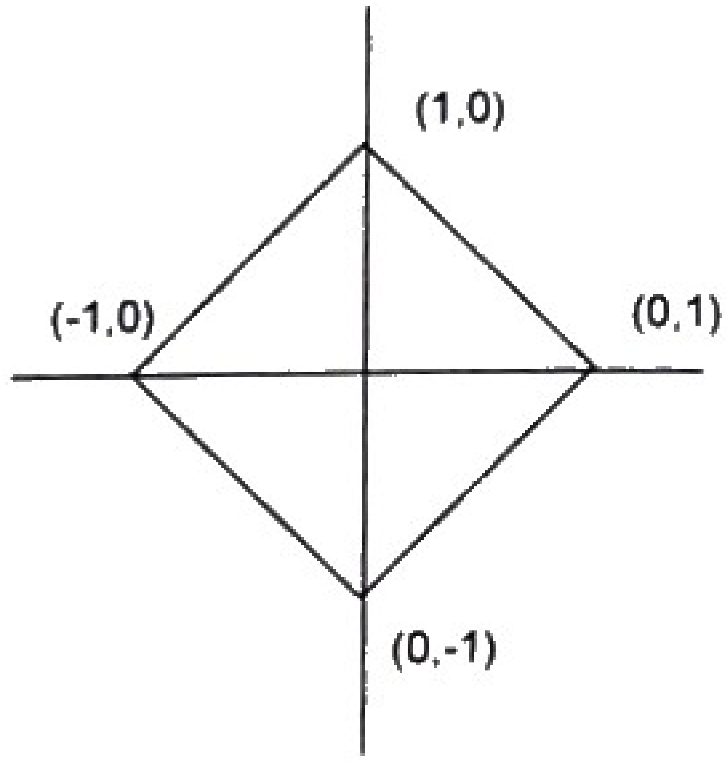
إذا كان (X, D) فضاءاً مترياً وكانت $\varepsilon > 0, x \in X$ عدداً حقيقياً موجباً، فان مجموعة النقاط y التي تنتمي إلي X بحيث $D(x, y) < \varepsilon$ تسمى جوار X الذي نصف قطره ε ويرمز له $N(x, \varepsilon)$ أو:

$$N(x, \varepsilon) = \{y : y \in X, D(x, y) < \varepsilon\}$$

من الضروري ملاحظة أن شكل الجوار يتوقف على الدالة المترية D فمثلاً في الفضاء المتري (R^2, D) إذا كان D البعد الفيثاغورسي يكون شكل الجوار قرص دائري مفتوح، كما في الشكل المجاور حيث يمثل جوار $(0,0)$ الذي نصف قطره (1).

أما الشكل الأخر فيمثل جوار الصفر $(0,0)$ الذي نصف قطره (1) بالنسبة للدالة المترية D_2.





وكما مر بنا في بند المجموعات المغلقة والمفتوحة، أن المجموعة تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كان كل عنصر فيها جوار يكون مجموعة جزئية من مجموعة الأصلية. أن تعريف المجموعة المفتوحة في الفضاء المتري هو تجديد وتعميم للتعريف السابق للمجموعة المفتوحة والتعريف المكافئ له في نظرية (46.1.2) في مجموعة الأعداد الحقيقية.

11.4.3 تعرف:

إذا كانت X أية مجموعة و D دالة مترية عليها، فالمجموعة الجزئية $U \subset X$ تكون مفتوحة في (X,D) إذا وفقط إذا وجد لكل $x \in U$ جوار مثل $N(x,\varepsilon)$ بحيث $N(x,\varepsilon) \subset U$.

12.4.3 مثال:

إذا كانت $X = R$ وكان البعد بين النقطتين x, y معرف كالآتي $D(x,y) = |x - y|$ فالفترة $(0,1)$ تكون مجموعة مفتوحة لأنها تحقق شرط التعريف السابق.

13.4.3 مبرهنة:

إذا كان (X, D) فضاءاً مترياً فان $N(x,\varepsilon)$ مجموعة مفتوحة لكل $x \in X$ حيث $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي موجب.

البرهان:

لتكن النقطة $w \in N(x,\varepsilon)$ لأجل البرهنة على أن $N(x,\varepsilon)$ مجموعة مفتوحة علينا أيجاد جوار $N(w,\varepsilon')$ بحيث $N(w,\varepsilon') \subset N(x,\varepsilon)$.

ليكن $\varepsilon' = \varepsilon - D(x,w)$ لذلك إذا كان $z \in N(w,\varepsilon')$ يكون

$D(w,z) < \varepsilon - D(x,w)$ ولذلك:

$$D(x,z) \le D(x,w) + D(w,z) < D(x,w) + \varepsilon - D(x,w) = \varepsilon$$

$$\therefore\ D(x,z) < \varepsilon$$

$$\therefore\ z \in N(x,\varepsilon)$$

$$\therefore\ N(w,\varepsilon') \subset N(x,\varepsilon)$$

وعلى هذا تكون المجموعة $N(x,\varepsilon)$ مجموعة مفتوحة.

14.4.3 مبرهنة:

إذا كان (X,D) فضاءً مترياً فان:

(1) X,ϕ مجموعتين مفتوحتين.

(2) تقاطع أي مجموعتين يكون مجموعة مفتوحة.

(3) اتحاد أية عائلة من المجموعات المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة.

البرهان:

(1) ليكن $x \in X$ و $\varepsilon > 0$ إذن $N(x,\varepsilon) \subset X$ لذلك فالمجموعة X مجموعة مفتوحة.

وحيث ϕ لا تحتوي على أية نقطة ولذلك تكون العبارة آلاتية صادقة ليكن $x \in \phi$ و $\varepsilon > 0$ لذلك فان $N(x,\varepsilon) \subset \phi$.

لاحظ أن $x \in \phi$ غير صادقة وان $N(x,\varepsilon)$ مجموعة جزئية من ϕ غير صادقة. والعبارة $P \to Q$ تكون صادقة إذا كانت P كاذبة و Q كاذبة. وبهذا برهنا على أن ϕ تحقق شروط تعريف المجموعات المفتوحة أي أن ϕ مجموعة مفتوحة.

(2) لتكن كل من U و V مجموعة مفتوحة وليكن $x \in U \cap V$ وحيث أن U مفتوحة فيوجد $\varepsilon_1 > 0$ بحيث $N(x,\varepsilon_1) \subset U$ وحيث أن V مفتوحة فيوجد $\varepsilon_2 > 0$ بحيث $N(x,\varepsilon_2) \subset V$ ليكن $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ لذلك يكون

$$N(x,\varepsilon) \subset U \cap V$$

وبهذا تكون المجموعة $U \cap V$ مجموعة مفتوحة.

(3) لتكن العائلة $\{U_i\}$ حيث $i \in I$ عائلة من المجموعات المفتوحة وليكن $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$

إذن يوجد i بحيث $x \in U_i$ ولما كانت U_i مجموعة مفتوحة، إذن يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث $N(x,\varepsilon) \subset U_i$

$$N(x,\varepsilon) \subset U_i \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

$$N(x,\varepsilon) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

لذلك فإن $\bigcup_{i \in I} U_i$ مجموعة مفتوحة

وبهذا يتم البرهان.

15.4.3 ملاحظة:

إن المبرهنة (14.4.3) تفتح الباب أمامنا لتعرف تبولوجي على كل فضاء متري وتكون مجموعات هذا التبولوجي هي المجموعات المفتوحة والمعرفة وفق التعريف (11.4.3) لذلك فإن لكل فضاء متري تبولوجي يصاحبه.

16.4.3 مبرهنة:

إذا كان (X,D) فضاء مترياً فالمجموعة U تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت اتحاداً لعائلة من الجوارات.

البرهان:

لتكن U اتحاداً لعائلة من الجوارات، لأن كل جوار هو مجموعة مفتوحة وبالاستناد إلى النظرية (14.4.3) الفرع (3) فإن U مجموعة مفتوحة لأنها اتحاد عائلة من المجموعات المفتوحة وبهذا يتم البرهن بالاتجاه الأول.

ولأجل برهان الاتجاه الثاني، نفرض إن U مجموعة مفتوحة. لذلك سنجد جواراً $N(x,\varepsilon)$ لكل $x \in U$ بحيث $N(x,\varepsilon) \subset U$ لذلك $\bigcup_{x \in U} N(x,\varepsilon) \subset U$ هذا من جهة، ومن جهة أخرى حيث إن لكل $x \in U$ يوجد جوار $N(x,\varepsilon)$ يحتوي على x، لذلك فان $x \in \bigcup N(x,\varepsilon)$

وعليه يكون: $U \subset \bigcup_{x \in U} N(x,\varepsilon)$

وعلى هذا فان $U = \left(\bigcup_{x \in U} N(x,\varepsilon)\right)$

وبهذا يتم البرهان.

17.4.3 تعريف:

في الفضاء المتري (X,D) تكون المجموعة F مغلقة إذا وفقط إذا كان F^c مجموعة مفتوحة.

18.4.3 مثال:

الفترة $[0,1]$ مجموعة مغلقة بالنسبة للفضاء المتري $D(x,y) = |x-y|$ المعرفة في مجموعة الأعداد الحقيقية لأنه إذا كان $x \in R \setminus [0,1]$ وجعلنا $\varepsilon = \min(|1-x|,|x|)$ سنجد أن: $N(x,\varepsilon) \subset R \setminus [0,1]$ ولهذا فان $R \setminus [0,1]$ مفتوحة وبهذا تكون $[0,1]$ مغلقه.

18.4.3 مبرهنة:

إذا كان (X,D) فضاء مترياً فان:

(1) X,ϕ مجموعات مغلقه.

(2) اتحاد أي مجموعتين مغلقتين مجموعة مغلقة

(3) تقاطع أي عائلة من المجموعات المغلقة يكون مجموعة مغلقه

البرهان:

(1) حيث أن ϕ مفتوحة فان $X = \phi^c$ مجموعة مغلقة. وان X مجموعة مفتوحة لذلك فان $\phi = X^c$ مجموعة مغلقة.

(2) إذا كانت B, A مجموعتين مغلقتين فان B^c, A^c مجموعتان مفتوحتان لذلك فان $B^c \cup A^c$ مجموعة مفتوحة ولكن $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$.

لذلك فان $(A \cap B)^c$ مجموعة مفتوحة. لذلك فان $A \cap B$ مجموعة مغلقة وبهذا يتم المطلوب للفرع (2).

(3) إذا كانت العائلة $\{F_i\}$ حيث $i \in I$ عبارة عن مجموعات جزئية مغلقة في X، لذلك فان F_i^c مجموعة مفتوحة لكل $i \in I$ لهذا يكون:

$$\bigcup_{i \in I} F_i^c = \left(\bigcap_{i \in I} F_i\right)^c$$

مجموعة مفتوحة. إذن يجب إن تكون المجموعة $\bigcap_{i \in I} F_i$ مجموعة مغلقة وبهذا يتم المطلوب.

5-3 تمارين

(1) برهن على إن المجموعة التي عناصرها نقاط معزولة تكون مجموعة قابلة للعد.

(2) برهن على انه إذا كانت A' مجموعة قابلة للعد فان A تكون قابلة للعد أيضا. هل العكس صحيح؟ وضح إجابتك بالأمثلة.

(3) برهن على انه إذا كانت A مرصوصة و B مغلقة فان $A \cap B$ مرصوصة.

(4) إذا كانت A ، B مجموعتين مرصوصتين فان كلا من $A \cup B, A \cap B$ مجموعة مرصوصة.

(5) برهن على انه إذا كانت كل من F_2, F_1 مجموعة مرصوصة غير خالية و $F_1 \cap F_2 = \phi$ فانه يوجد عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ بحيث $|x_1 - x_2| \geq \varepsilon$ لكل $x_1 \in F_1$ و $x_2 \in F_2$.

(6) برهن على انه إذا كانت كل من F_2, F_1 مجموعتين مرصوصتين منفصلتين فتوجد مجموعتان U_2, U_1 مفتوحتان ومنفصلتان بحيث $F_2 \subset U_2, F_1 \subset U_1$.

(7) إذا كانت T تمثل عائلة من المجموعات المرصوصة وكان تقاطع أي عدد منته من عناصر T مجموعة غير خالية، فان تقاطع كل عناصر T يكون مجموعة غير خالية.

(8) أعط مثالاً لعائلة من المجموعات التي تكون متتابعة متناقصة من المجموعات غير الخالية والمغلقة ويكون تقاطعهما خالياً.

تلميح: ادرس متتابعة المجموعات الآتية

$$F_n = \{i : i \geq n, \forall n = 1,2,3,\ldots\}$$

(9) إذا كان $X = R^2$ مجموعة نقاط المستوي وكانت $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ نقطتين في R^2 فأي من الدوال الآتية يمثل دالة مترية؟

وضح أجابتك بذكر الأسباب.

I - $D_1\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} = \min(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$

II - $D_2\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

III - $D_3\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} = |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2|$

(10)ليكن (X, D) فضاء متريا وليكن $x, y \in X$ فأي التطبيقات تعرف داله مترية على X.

I - $D_1(x, y) = KD(x, y)$ حيث K عدد حقيقي موجب.

II - $D_2(x, y) = KD(x, y)$ حيث K عدد حقيقي.

III - $D_3(x, y) = (D(x, y))^2$

(11) إذا كانت $X = R$ وكان $d(x, y) = |x - y|$ فاثبت إن العائلة T من المجموعات الجزئية للمجموعة R والمعرفة بالشكل:

$$T = \{A : \forall x \in A, \exists I_x \subset A\}$$

حيث I_x فترة مفتوحة تكون تبولوجيا للأعداد الحقيقية R

(12) إذا كانت $A = \{1,2,3\}$ مجموعة فأوجد كل تبولوجيا ممكنة على A واستخدام بعض هذه التبولوجيا للبرهنة على إن مجموعة ما تكون مفتوحة بالنسبة لتبولوجي معين قد لا تكون كذلك بالنسبة لتبولوجي أخر.

الباب الرابع

الدوال العددية والمتتابعات
(Real Valued Functions and Sequences)

1.4 الدوال العددية
Real Valued Function

من الأفكار المهمة في الرياضيات هي فكرة الدالة أو التطبيق. وفي هذا البند سوف نعين معظم التعاريف والمبرهنات التي سبق أن تعرف عليها الطالب في دراسته السابقة.

1.1.4 تعريف:
لتكن كل من A ، B مجموعة. أن أية مجموعة جزئية من $A\times B$ تسمى علاقة من A إلي B (Relation)

2.1.4 تعريف
الدالة هي علاقة f من مجموعة A إلي مجموعة B بحيث يكون لكل عنصر $x\in A$ صورة وحيدة $y\in B$.

أي أن إذا كان $(x,y)\in f$ و $(x,y')\in f$ فإن $y=y'$. وتسمى $f(x)$ قيمة الدالة عند x. كما يمكن التعبير عن الدالة بأحدي الطرق التالية:

$f:A\to B$ أو $A\xrightarrow{f}B$ أو $y=f(x)$

وتسمى A نطاق الدالة f ويرمز لها بالرمز D_f. أما المجموعة $\{f(x)\}\subset B$ فتسمى مدى الدالة f ويرمز لها بالرمز R_f.

3.1.4 مثال:

إذا كانت $A=\{a,b,c,d\}$ والمجموعة $B=\{2,3,5,7,11\}$ فإن مجموعة الأزواج المرتبة $\{(a,2),(b,3),(c,7),(d,11)\}$ تمثل دالة $f:A\rightarrow B$ نطقها المجموعة A ومدها المجموعة $\{2,3,7,11\}$ وهي مجموعة جزئية من B.

4.1.4 ملاحظة:

من الدوال المهمة هي دالة الثابت (Constant function) وتعرف كما يأتي:

الدالة $f:R\rightarrow R$ تسمى دالة الثابت إذا كان مدها مجموعة أحادية.

فمثلا $f(x)=2$ لكل $x\in R$ دالة ثابتة نطاقها $(-\infty,\infty)$ ومداها $\{2\}$.

5.1.4 تعريف:

ليكن كل من $f:A\rightarrow B$ و $g:C\rightarrow D$ دالة فإن $f=g$ إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

(1) $A=C$

(2) $B=D$

(3) $f(x)=g(x),\forall x\in A$

6.1.4 تعريف:

ليكن $f:A\rightarrow B$ دالة، تسمى f دالة عددية إذا فقط إذا كان $A\subset R$ و $B\subset R$.

7.1.4 مثال:

إذا كان $f : R-\{0\} \to R$ بحيث أن $f(x)=\frac{1}{x}$, نلاحظ أن هذه الدالة عددية. لماذا؟

8.1.4 ملاحظة:

ليكن كل من $f : A \to R$ و $g : A \to R$ دالة عددية. لنفرض أن $x \in A$ وبما أن $f(x) \in R$ و $g(x) \in R$ ايضاً يمكننا أن نجد $f(x)+g(x)$ أو $f(x)g(x)$ أو $f(x)\,/\,g(x)$ بشرط أن تكون $g(x) \neq 0$ في هذه الحالة.

وبناء على ما تقدم يمكننا أن نقترن X مع $f(x)+g(x)$ أونقرن x مع $f(x).g(x)$ أو x مع $f(x)/g(x)$ ونشكل كل حالة من الحالات الثلاثة دالة تسمى الأولى مجموع دالتين والثانية حاصل ضربهما والثالثة قسمتهما وهذا مايسمى بجبر الدوال (Algebra of functions).

9.1.4 تعريف:

لتكن $f : A \to R$ و $g : A \to R$ حيث $A \subset R$

(1) مجموعة الدالتين $g.f$ هو دالة h بحيث:

$$h(x) = f(x) + g(x), \forall x \in A, h : A \to R$$

(2) حاصل ضرب الدالة $g.f$ هو دالة $t : A \to R$ بحيث أن

$$t(x) = f(x).g(x), \forall x \in A$$

(3) قسمة f على g هو دالة بحيث $r : A \to R$

$$r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

بحيث أن $g(x) \neq 0$

ويمكن الكتابة بشكل مختصر كالآتي:

$$\left.\begin{array}{l} h = f + g \\ t = f.g \\ r = f/g \end{array}\right\}, \forall x \in R$$

10.1.4 مثال:

ليكن $f : R \to R$ بحيث أن $f(x) = x^2$ وليكن $g : R \to R$ بحيث أن $g(x) = x^2 + 3$ نفي هذه الحالة يكون:

$$h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= x^2 + (x^2 + 3) = 2x^2 + 3$$

ويكون:

$$t(x) = (f.g)(x) = f(x).g(x)$$
$$= x^2 - (x^2 + 3) = x^4 + 3x^2$$

وان

$$r(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{x^2 + 3}$$

11.1.4 ملاحظة:

لكي نوضح فكرة الدوال المحدود ه (Bounded Functions) وغير المحدود ه دعنا ندرس الأمثلة التالية:

12.1.4 مثال:

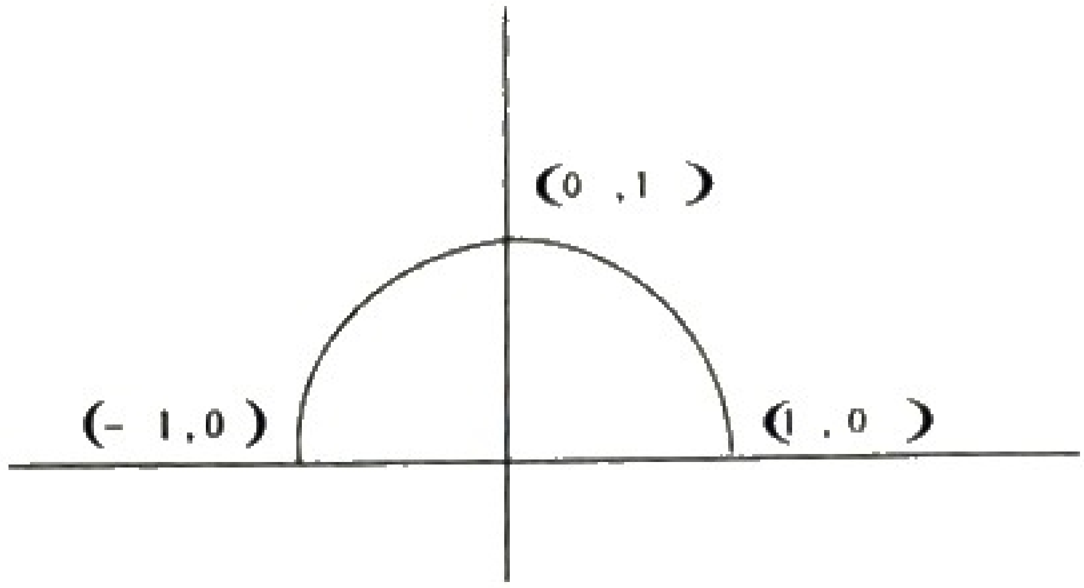
ليكن

$$f : [-1,1] \to R$$

حيث أن

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

لقد عرف الطالب كيفية رسم مخطط هذه الدالة



نلاحظ من الشكل أعلاه أن $f(x)\leq 1$ لكل X ينتمي إلي منطلق f .

ولذلك لأن:

$$-1\leq x\leq 1$$

$$0\leq x^2\leq 1$$

$$-1\leq -x^2\leq 0$$

$$0=1-1\leq 1-x^2\leq 1+0=1$$

$$0\leq \sqrt{1-x^2}\leq 1$$

$$0\leq f(x)\leq 1$$

يقال أن $f(x)$ في هذه الحالة محدودة من الأعلى والأسفل.

13.1.4 مثال:

ليكن $f:R\rightarrow R$ بحيث أن $f(x)=|x|$

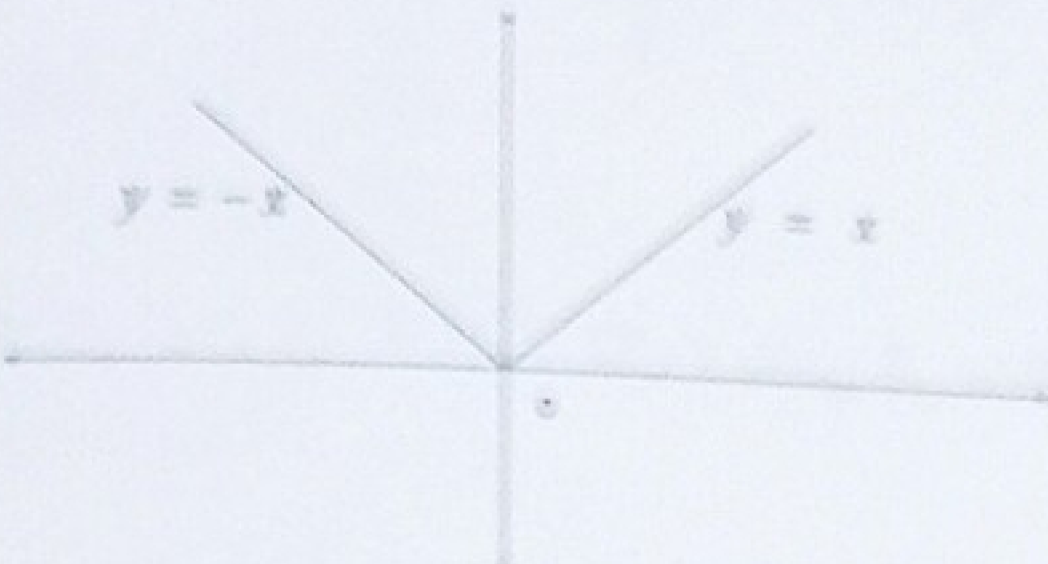
بما أن

$$|x| \geq 0, \forall x \in R$$

أي أن

$$|f(x)| \geq 0$$

يقال لهذه الدالة أنها محدودة من الأسفل (Bounded below) لاحظ الشكل التالي:



14.1.4 تعريف:

إذا كانت الدالة f معرفة كالآتي $f : A \to R$ فإن

(1) تكون f محدودة من الأعلى (Bounded above) إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: $\exists m_1 \in R; f(x) \leq m_1, \forall x \in A$

(2) تكون الدالة f محدودة من الأسفل (Bounded below) إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$\exists m_2 \in R; f(x) \geq m_2, \forall x \in A$$

(3) تكون الدالة f محدودة إذا وفقط إذا كانت محدودة من الأسفل ومن الأعلى.

15.1.4 مبرهنة:

ليكن $f : A \to R$ دالة حقيقية.

تكون الدالة f دالة محدودة إذا وفقط إذا وجد $m \geq 0$ بحيث إن:

$|f(x)| \leq m, \forall x \in A$

البرهان:

نفرض أن f محدودة، يوجد $a, b \in R$ بحيث أن

$a \leq f(x) \leq b \quad , \quad \forall x \in A$

ليكن m أكبر العددين

$\{|a|, |b|\}$

و عليه سيكون

$|a| \leq m \quad , \quad |b| \leq m$

وبذلك يكون

$-m \leq -|a|$

ولكن

$m \geq |b| \geq b \geq f(x)$

وكذلك

$f(x) \geq a \geq -|a| \geq -m$

و عليه سيكون

$-m \leq f(x) \leq m$

أو :

$|f(x)| \leq m$

(2) لنفرض وجود $m > 0$ بحيث أن

$$|f(x)| \leq m, \forall x \in A$$

وعليه سيكون:

$$-m \leq f(x) \leq m, \forall x \in A$$

وحسب تعريف (14.1.4) تكون الدالة $f(x)$ محدودة.

16.1.4 مبرهنة:
ليكن كل من $f : A \to R$ و $g : A \to R$ دالة عددية ومحدودة فان كل من $f + g$ و $f.g$ دالة محدودة.

البرهان:

بما أن f داله محدودة و g كذلك فان يوجد $m_1 > 0$ و $m_2 > 0$ بحيث أن

$$|f(x)| \leq m_1 . \forall x \in A$$

وكذلك

$$|g(x)| \leq m_2 . \forall x \in A$$

وبما أن

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq m_1 + m_2 = m$$

وعليه سيكون:

$$|f(x) + g(x)| \leq m . \forall x \in A$$

أي أن $f + g$ داله محدوده.

(2) بما أن

$$|f(x).g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq m_1 . m_2 = t$$

وعليه

$|f(x).g(x)| \le t.\forall x \in A$

أي أن $f.g$ محدودة ايضاً.

2.4 متتابعات الأعداد الحقيقية Sequences of Real Numbers

سبق للطالب أن تعرف على الدالة الحقيقية وفي هذا البند سوف يتعرف على نوع خاص من الدوال الحقيقية تسمى بالمتتابعات ثم سيدرس خواصها.

1.2.4 ملاحظة:

لنتأمل الدوال التالية:

(1) لتكن $f : N \to Z$ بحيث أن $f(n) = 3n$ لكل $n \in N$

(2) لتكن $g : N \to Z$ بحيث أن $g(n) = (-1)^n$ لكل $n \in N$

(3) لتكن $t : N_e \to Z$ بحيث أن $t(n) = n^2$ لكل $n \in N_e$

حيث N_e تمثل مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية و Z مجموعة الأعداد الصحيحة، نلاحظ أن كل دالة من الدوال السابقة منطلقها مجموعة الأعداد الطبيعية N أو مجموعة جزئية منها.

تسمى كل دالة من هذه الدوال متتابعة.

2.2.4 تعريف:

لتكن A مجموعة غير خالية و $H \subseteq N$، أن العبارة f متتابعة على A تعني أن f هو بيان لدالة منطلقها H ومستقرها A وبعبارة أخرى:

$$f : H \to A$$

3.2.4 ملاحظة:

سنتفق في هذا الفصل على أن يكون منطلق المتتابعة هو N (مجموعة الأعداد الطبيعية) إلا إذا ذكر خلاف ذلك.

4.2.4 ملاحظة:

أن المتتابعة دالة والدالة هي علاقة لذلك فالمتتابعة ما هـــي إلا مجموعـــة مـــن الأزواج المرتبة هي:

$$\{(1,f(1)),(2,f(2)),\ldots\ldots\ldots,(n,f(n)),\ldots\ldots\ldots\}$$

حيث أن مجموعة المساقط الأولى هي مجموعة الأعداد الطبيعية أو مجموعـــة جزئية منها لذلك اتفق على ترك المساقط الأولى و الاكتفاء بمجموعة الصور:

$$\{f(1),f(2),\ldots\ldots,f(n),\ldots\ldots\}$$

ويسمى $f(1)$ الحد الأول و $f(2)$ الحد الثاني و $f(n)$ الحد النوني للمتتابعة.

ويرمز للمتتابعة بعدة رموز منها الرمز $\langle f(1),f(2),\ldots\ldots\rangle$ وقد يختصر رمز المتتابعة إلى $\langle f(n)\rangle$ حيث $n\in N$ والذي بدوره يختصر إلى $\langle fn\rangle$، وسوف نستخدم الرمز $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ للدالة على المتتابعة أو $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

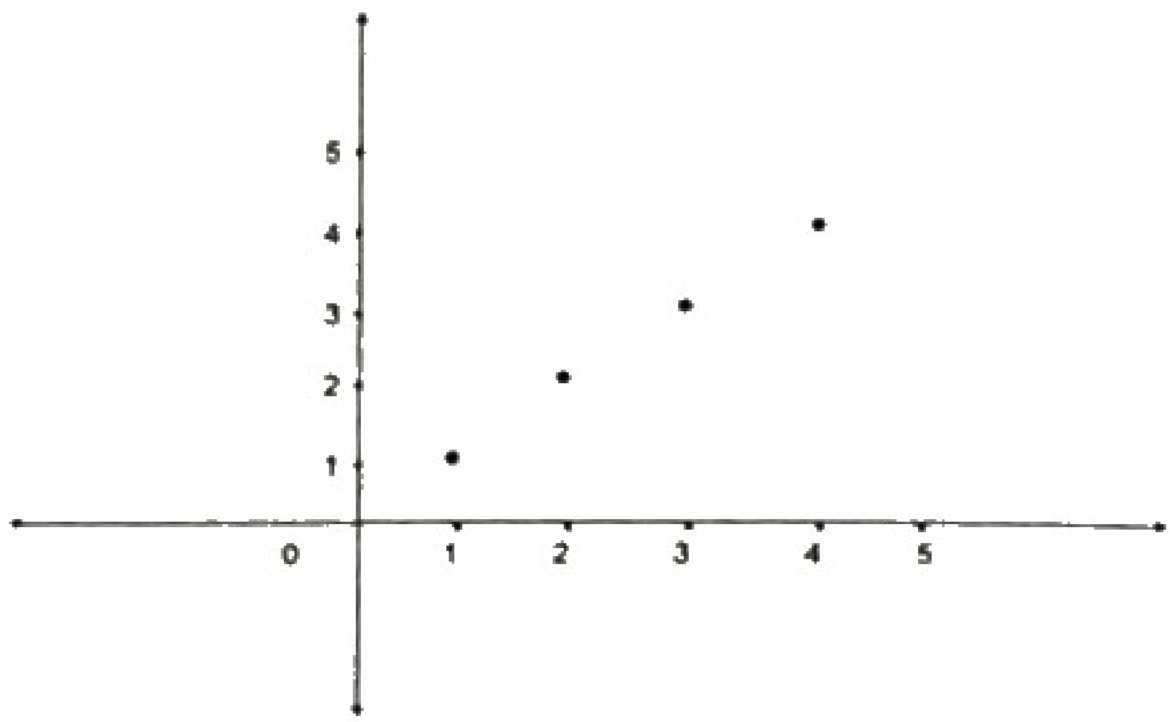
5.2.4 ملاحظة:

أن المتتابعة على R تسمى بالمتتابعة الحقيقية، وسنتعامل في هذا الفصل مـــن الكتاب مع المتتابعات الحقيقية فقط،

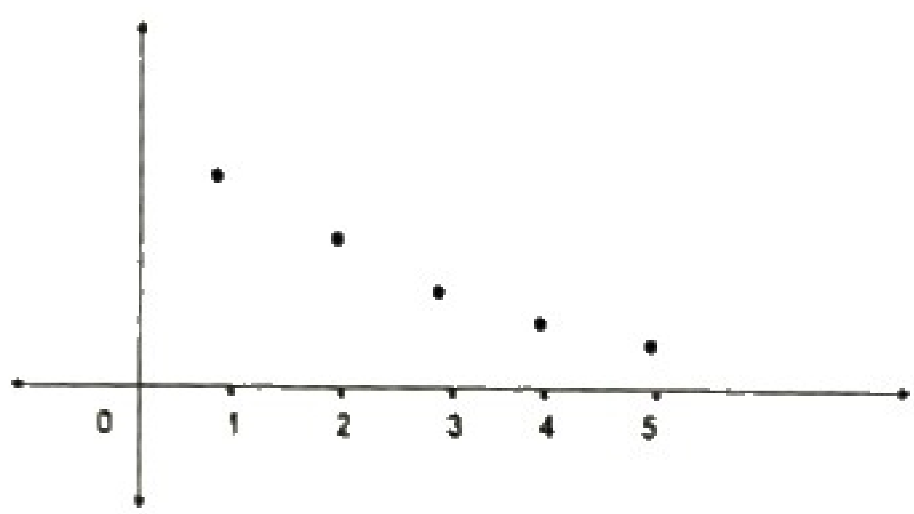
$$f : N \rightarrow R$$

6.2.4 ملاحظة:

بما أن المتتابعة ما هي إلا داله فعلية يمكن تمثيل المتتابعة بخط ديكا رتي على المستوي الأقليدي فالمتتابعة $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ تمثل على المستوي الاقليدي بالمخطط التالي:



والمتتابعة $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ تمثل على المستوي الأقليدي بالمخطط:



وإذا قارنا المتتابعتين $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ في تمثيلهما الديكارتي نلاحظ أن حدود المتتابعة $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ تباعد عن المحور السيني كلما كبرت n بينما صور المتتابعة $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب من المحور السيني كلما كبرت n.

أن التمثيل الديكارتي للمتتابعة يفيدنا في بعض الأحياء لمعرفة سلوك المتتابعة.

7.2.4 تعريف:

لتكن A فترة مفتوحة و $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة يقال أن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ أخيرا محتواة في A إذا وفقط إذا احتوت A جميع حدود المتتابعة ما عدا عدد منته من حدودها.

8.2.4 مثال:

لو أخذنا الفترة $(-1,1)$ والمتتابعة $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ نلاحظ أن هذه الفترة حاوية على جميع حدود هذه المتتابعة ما عدا الحد الأول فعليه تكون $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ أخيرا محتواه في $(-1,1)$.

وكذلك لوا خدنا الفترة $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ نلاحظ أن هذه الفترة تحوي على جميع حدود المتتابعة $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ما عدا الحد الأول والثاني، وعليه سيكون $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ أخيرا محتواه في $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

بينما المتتابعة $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ جميع حدودها واقعه خـــارج $(-1,1)$. فالمتتابعـــة $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ ليست أخيرا محتواه في $(-1,1)$.

9.2.4 تعريف:

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة حقيقية و $a \in R$.

أن العبارة a_n تقترب من a ونكتب $a_n \to a$ تعني أن:

a_n أخيرا محتواة في أية فتره مفتوحة حاويه على a.

10.2.4 مثال:

لتكن $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة حقيقية، أثبت أن $\frac{1}{n} \to 0$

البرهان:

لتكن (a,b) أية فترة مفتوحة حادة على 0، أي أن $a < 0 < b$، وباستخدام حقيقية (12.3.1) فانه يوجد $m \in N$ بحيث:

$$\frac{1}{m} < b$$

سنبرهن أن (a,b) حاوية على جميع حدود المتتابعة ما عدا

$$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$$

لنفرض أن $n \in N$ بحيث ان $n > m$ وعليه سيكون:

$$a < 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{m} < b$$

أي أن

$$a < \frac{1}{n} < b$$

اي ان $a_n \in (a,b)$ لكل $n \in N$ حيث $n > m$ إذن $\frac{1}{n} \to 0$

11.2.4 مثال:

لتكن $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة حقيقية، اثبت ان $1+\frac{1}{n} \to 1$

البرهان:

لتكن (a,b) فترة مفتوحة حاوية على 1.

و عليه سيكون

$$1-a>0 \ , \ b-1>0$$

نفرض أن

$$t=\min\{b-1, 1-a\}$$

وباستخدام الحقيقية (12.3.1) نحصل على وجود $m \in N$ بحيث ان $\frac{1}{m}<t$ لتكن $n \in N$ بحيث أن $n > m$.

ومن ذلك نحصل:

$$\frac{1}{n}<\frac{1}{m}$$

إذن:

$$\frac{1}{n}<\frac{1}{m}<t \le b-1$$

و عليه سيكون

$$\frac{1}{n}+1<b$$

لكن:

$$a<1<1+\frac{1}{n}$$

وعليه سيكون

$$a < a_n < b, \forall n > m$$

وبعبارة أخرى $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ أخيرا محتواه في (a,b). أي أن:

$$1+\frac{1}{n} \to 1$$

12.2.4 ملاحظة:

أن التعريف (9.2.4) فيه شيء من الصعوبة وألان سنعطي تعريفاً أخر وسنبرهن أن هذا التعريف يكافئ التعريف السابق وبعد ذلك نترك الحرية لأستخدام احد هذين التعريفين حيثما شاء.

13.2.4 تعريف:

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة حقيقية و $a \in R$ يقال أن $a_n \to a$ إذا وفقط إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $m \in N$ بحيث أن $|a_n - a| < \varepsilon$ لكل $n > m, n \in N$.

14.2.4 مبرهنة

التعريف (9.2.4) $\Leftrightarrow$ التعريف (13.2.4)

البرهان:

(1) لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة تحقق التعريف (9.2.4)، ولتكن $\varepsilon > 0$ خذ الفترة $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$، نلاحظ أن $a \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

وحسب تعريف (9.2.4) يوجد $m \in N$ بحيث أن إذا كان $n > m$ فأن:

$$a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

أي أن

$$a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$$
$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$$

أي أن

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

(2) لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة تحقق التعريف (13.2.4) ولتكن (c,d) فترة مفتوحة حاوية على a.

نلاحظ أن

$$c < a < d$$

إذن سيكون

$$a-c > 0, d-a > 0$$

نفرض أن

$$\varepsilon = \max\{a-c, d-a\}$$

حسب تعريف (13.2.4) يوجد $m \in N$ بحيث أن

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > m$$

وبذلك سيكون:

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$$
$$c = a-(a-c) < a-\varepsilon < a_n < \varepsilon + a < d - a + a = d$$

ومنه نحصل على أن:

$$c < a_n < d$$

لكل $n > m$ وهو المطلوب.

15.2.4 مبرهنة:

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة ولتكن $a,b \in R$ فإذا كانت $a_n \to a$ و $a_n \to b$
فإن $a = b$.

البرهان:

نفرض أن $a \neq b$ وكذلك $d = |a-b|$

نلاحظ $d > 0$ وبما أن $a_n \to a$

إذن يوجد $w_1 \in N$ بحيث:

$$|a_n - a| < \frac{d}{2}, \forall n > w_1$$

وبما ان

$$a_n \to b$$

إذن يوجد $w_2 \in N$ بحيث:

$$|a_n - b| < \frac{d}{2}, \forall n > w_2$$

نفرض أن

$$W = \max\{w_1, w_2\}$$

وعليه سيكون:

$$W \geq w_2 \quad , \quad W \geq w_1$$

نفرض أن $n > W$ وعليه سيكون $n > W \geq w_1$ كذلك $n > W \geq w2$.

نلاحظ أن:

$$|a-b| = |(a-a_n)+(a_n-b)| \leq |a-a_n| + |a_n-b| < \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d = |a-b|$$

إذن

$$|a-b|<|a-b|$$

وهذا تناقض. لماذا؟

إذن يجب أن يكون $a=b$، وهو المطلوب.

16.2.4 ملاحظة:

عرفنا في البند الأول من هذا الباب معنى الدالة المحدودة وبما أن المتتالية هي دالة، فإذن يمكن أن نعرف المتتابعة المحدود ه بتعريف الدالة المحدوده نفسه.

17.2.4 مثال:

لندرس المتتابعة $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$، نلاحظ $\frac{1}{n}>0$ لكل $n\in N$ وعليه سيكون (0) هو حد أدنى للمتتابعة $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

ونلاحظ ايضا أن $\frac{1}{n}\leq 1$ لكل $n\in N$، وعليه سيكون (1) حداً أعلى للمتتابعة $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$، وبذلك يكون $0<\frac{1}{n}\leq 1$ لكل $n\in N$ أي أن المتتابعة محدودة.

18.2.4 مثال:

(1) المتتابعة $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ نلاحظ أنها ليست محدودة من الأعلى ولكنها محدودة من الأسفل (لماذا؟) وبذلك تكون المتتابعة غير محدودة.

(2) المتتابعة $\{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$ ليست لها حد أعلى ولا أسفل فهي غير محدودة.

19.2.4 ملاحظة:

أن المتتابعة $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى الصفر كما برهنا سابقاً ولو رسمناها على خط الأعداد لرأيناها تتجمع حول الصفر، كما يمكن ملاحظة أن الصفر هو حد أدنى

و(1) هو حد أعلى أي أنها محدودة والسؤال الأن: هل أن كل متتابعة متقاربة هي محدودة؟ أن المبرهنة التالية تجيب على هذا السؤال.

20.2.4 مبرهنة:

إذا كانت $a_n \to a$ فإن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة

البرهان:

ناخذ $\epsilon = 1$، يوجد $W \in N$ بحيث أن $|a_n - a| < 1, \forall n > W$

وعليه

$$-1 < a_n - a < 1$$

أي أن

$$a - 1 < a_n < 1 + a$$

لنفرض أن

$$t = \max\{a+1, |a_1|, |a_2|, ..., |a_W|\}$$

وان

$$r = \min\{a-1, a_1, a_2, ..., a_W\}$$

نلاحظ أن

$$(a-1, a+1) \subset (r, t)$$

وبما أن

$$a_n \in (a-1, a+1), \forall n > W$$

وعليه سيكون

$$a_n \in (r,t), \forall n > W$$

لتكن $m \in N$ بحيث أن $m \leq W$

وبما أن $r \leq a_m \leq t$ لماذا؟

وعليه سيكون:

$$r \leq a_n \leq t, \forall n \in N$$

أي أن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة.

21.2.4 مبرهنة:
إذا كانـــت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعـــة و $a \neq 0$ و $a_n \to a$ فانـــه يوجـــد $W \in N, K > 0$ بحيث أن $|a_n| > K$ لكل $n > W$

البرهان:

لتكن

$$K = \frac{1}{2}|a|$$

وبما أن

$$a_n \to a$$

إذن يوجد $W \in N$ بحيث أن:

$$|a_n - a| < \frac{|a|}{2}, \forall n > W$$

نلاحظ أن

$$|a|-|a_n| \le |a-a_n| = |a_n - a| < \frac{|a|}{2}$$

أي أن

$$|a|-|a_n| < \frac{|a|}{2}$$

وعليه سيكون

$$|a|-\frac{|a|}{2} < |a_n|$$

أي أن

$$|a_n| > \frac{|a|}{2}, \forall n > W$$

وهو المطلوب.

22.2.4 ملاحظة:

سوف ندرس المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ من حيث علاقة الحد النوني لها مع الحد النوني +1. هل أن الحد النوني (a_n) اكبر من الحد النوني (a_{n+1}) او اصغر منه؟ أن هذه العلاقة تعطينا نوعاً خاصاً من المتتابعات.

23.2.4 تعريف:

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة تحقق احد الشرطين التاليين:

(1) $a_n \ge a_{n+1}, \forall n \in N$

(2) $a_n \le a_{n+1}, \forall n \in N$

تسمى هذه المتتابعة متتابعة رتيبة (Monotone Seguence) في حالة كـون هذه المتتابعة تحقق الشرط الأول فأنها تسمى متتابعة رتيبة تنازلية (Decreasing Seguence)، بينما إذا حققت الشرط الثـاني تـسمى متتابعـة رتيبـة تزايديـة (Increasing Seguence).

24.2.4 مثال:

المتتابعة $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ نلاحظ أن $a_n > a_{n+1}$ لكل $n \in N$ فهذه المتتابعة هي متتابعـة رتيبة تنازلية بينما المتتابعة $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ نلاحظ $a_n > a_{n+1}$ فهي متتابعة رتيبة تزايدية.

25.2.4 مبرهنة:

إذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة محدودة تزايدية فأنها تقترب من نقطة ما.

البرهان:

لنفرض أن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ تزايدية

وبما أنها محدودة بالفرض

إذن لها اصغر حد أعلى (L.U.B).

نفـرض أن L.U.B = a للمتتابعـة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$، نفـرض أن $\in > 0$ إذن يوجـد $W \in N$ بحيث أن $a - \varepsilon < a_W \le a$ لماذا؟

وبما أن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ تصاعدية ومنها نحصل:

$a_W \le a_n \le a, \forall n > W$

وعليه يكون:

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > W$$

وبذلك يكون

$$a_n \to a$$

وهو المطلوب.

26.2.4 مبرهنة:

إذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة تنازلية و محدودة فأنها تقترب من نقطة ما.

البرهان:

لنفرض أن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة تنازلية وبما أنها محدودة بالفرض، فان لها اكبر حد أدنى (g.L.B).

نفرض أن g.L.B = b للمتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$،

ألان نفرض أن $\varepsilon > 0$

إذن يوجد $W \in N$ بحيث أن:

$$b \le a_W < b + \varepsilon$$

وبما أن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة تنازلية فان

$$b \le a_n \le a_W \forall w < n$$

وعليه سيكون

$$|a_n - b| < \varepsilon \ \forall w < n$$

وبذلك يكون

$$a_n \to b$$

اي أن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ تقترب من نقطة ما.

3.4 جبر المتتابعات: Algebra of Seguences

لقد عرفنا كيفية أجراء عمليات/الجمع والطرح والضرب والقسمة على دالتين وبما أن المتتابعة ما هي إلا دالة ففي امكاننا نجمع ونطرح ونضرب ونقسم متتابعتين لتكوين متتابعة جديدة.

وعرفنا في البند السابق من هذا الباب مفهوم غاية المتتابعة وكيفية البرهنة على أن المتتابعة متقاربة أم لا.

كما لوحظ صعوبة البرهنة على تباعد أو تقارب متتابعة باستخدام التعريف لذلك سنحاول أن نجد بعض المبرهنات التي تساعدنا على معرفة تباعد أو تقارب متتابعة بدون اللجوء إلى استخدام التعريف.

1.3.4 مبرهنة:

لتكن كل من $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة حقيقية غاية كل منهما b, a على التوالي فان:

$$a_n + b_n \to a + b \quad (1)$$

$$a_n - b_n \to a - b \quad (2)$$

البرهان:

ستبرهن الجزء (1) من هذه المبرهنة، أما الجزء (2) فيترك للطالب (1) نفرض أن $\varepsilon > 0$ وبما أن $a_n \to a$

إذن يوجد $W_1 \in N$ بحيث أن:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > W_1$$

وبما أن

$$b_n \to b$$

فأنه يوجد $W_2 \in N$ بحيث أن:

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > W_2$$

لتكن

$$W = \max\{W_1, W_2\}$$

نجد $n > W$ وعليه سيكون $n > W \geq W_1$ و $n > W \geq W_2$ لكن:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وهذا يؤدي إلى

$$a_n + b_n \to a + b$$

وهو المطلوب.

مبرهنة 2.3.4:

لتكن كل من $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة حقيقية غاية كل منها b, a على التوالي فان:

(1) $c.a_n \to c.a$ حيث $c \in R$

(2) $a_n.b_n \to a.b$

البرهان:

(1) لتكن $\varepsilon > 0$ وبما أن $a_n \to a$ ، لنفرض أن $c \neq 0$ إذن يوجد $W \in N$ بحيث:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}, \forall n > W$$

نلاحظ أن:

$$|c.a_n - c.a| = |c(a_n - a)| = |c||a_n - a| < |c|.\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

وعليه

$$|c.a_n - c.a| < \varepsilon$$

أي أن

$$c.a_n \to c.a$$

إذا كان $c = 0$ فالمسألة تكون بسيطة جداً.

(2) بما أن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة متقاربة .

إذن يوجد m حيث $m > 0$ وبحيث أن:

$$|a_n| \leq m, \forall n \in N$$

حسب مبرهنة (20.2.4)

بما أن

$$b_n \to b \text{ و } a_n \to a$$

إذن يوجد $W \in N$ بحيث أن:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{m + |b|}, |b_b - b| < \frac{\varepsilon}{m + |b|}, \forall n > W$$

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab|$$

$$=|a_n(b_n-b)+b(a_n-a)|\le|a_n||b_n-b|+|b||a_n-a|<m\frac{\varepsilon}{m+|b|}+|b|.<\frac{\varepsilon}{m+|b|}$$

$$=\frac{\varepsilon}{m+|b|}(m+|b|)=\varepsilon$$

أي أن

$$|a_n.b_n-a.b|<\varepsilon,\forall n>W$$

أي أن

$$a_n.b_n \to a.b$$

وبهذا يتم البرهان

3.3.4 ملاحظة:

أن عكس المبرهنة السابقة غير صحيح أي انه إذا كان $a_n b_n \to p$ فليس من الضروري أن كلا من $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ تكون متقاربة.

4.3.4 مثال:

نفرض أن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}=\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ نلاحظ أن كلاً من المتتابعين متباعدة لكن:

$$\{a_n.b_n\}_{n=1}^{\infty}=\{1\}_{n=1}^{\infty}$$

وهي متتابعة متقاربة.

5.3.4 مثال:

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}=\{n\}_{n=1}^{\infty}$

نلاحظ أن المتتابعة $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة ولكن المتتابعة $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ متباعدة،

أما

$$\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}.n\right\}_{n=1}^{\infty} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$$

فهي متتابعة متقاربة.

6.3.4 مبرهنة:

إذا كانت $b_n \to b$ حيث $b \neq 0$

وان

$$b_n \neq 0, \forall n \in N$$

فإن

$$\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$$

البرهان:

لنفرض أن $\varepsilon > 0$ وبما أن $b_n \to b$

إذن يوجد $K > 0$ و $W_1 \in N$ بحيث أن :

$$|b_n| < K, \forall n > W_1$$

وكذلك يوجد $W_2 \in N$ بحيث أن :

$$|b_n - b| < \varepsilon K |b|, \forall n > W_2$$

لنفرض أن

$$W = \max\{W_2, W_1\}$$

وبما أن:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n| - |b|} < \frac{\varepsilon . K . |b|}{K . |b|} = \varepsilon \ \forall \ n > W$$

أي أن

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|<\varepsilon, \forall n \in N$$

أي أن

$$\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$$

7.3.4 نتيجة:

إذا كانت $a_n \to a$ و $b_n \to b$،

حيث أن $b \neq 0$ وان

$$b_n \neq 0 \quad , \quad \forall n \in N$$

فإن

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$$.

البرهان:

يترك للطالب (مستخدماً مبرهنة **(2.3.4)** ومبرهنة **(6.3.4)**).

8.3.4 ملاحظة:

هل أن عكس النتيجة السابقة (7.3.4) صحيح؟

أي إذا كان كل من $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$، $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة وكان $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة متقاربـــة،

فهل من الضروري أن يكون كل من $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة؟ الجواب كلا.

9.3.4 مثال:

ليكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$ نلاحظ أن كلا من المتتابعتين متباعدة ولكن:

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$$

وهي متتابعة متقاربة.

10.3.4 مثال:

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ فهذه متتابعة متقاربة ولكـــن $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعـــة متباعدة، لكن

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{\frac{1}{n}}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

وهي متتالية متقاربة.

11.3.4 مبرهنة:

إذا كان $a_n \to a$ فان $|a_n| \to |a|$

البرهان:

لنفرض أن $\varepsilon > 0$ وبما أن $a_n \to a$

إذن يوجد $W \in N$ بحيث أن:

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > W$$

وبما أن

$$\varepsilon > |a_n - a| \geq ||a_n| - |a||$$

نحصل على أن:

$$|a_n| \to |a|$$

12.3.4 ملاحظة:

إذا كان $|a_n| \to |a|$ فهل من الضروري أن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة؟

الجواب: كلا.

13.3.4 مثال:

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$

هي متتابعة متباعدة لكن $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$ وهي متتابعة متقاربة.

14.3.4 مبرهنة:

إذا كان $|a_n| \to 0$ فان $a_n \to 0$

البرهان:

نفرض أن $\varepsilon > 0$ وبما أن $|a_n| \to 0$

إذن يوجد $W \in N$ بحيث أن:

$$||a_n| - 0| < \varepsilon, \forall n > W$$

وبما أن:

$$||a_n| - 0| = ||a_n|| = |a_n| = |a_n - 0|$$

أي أن:

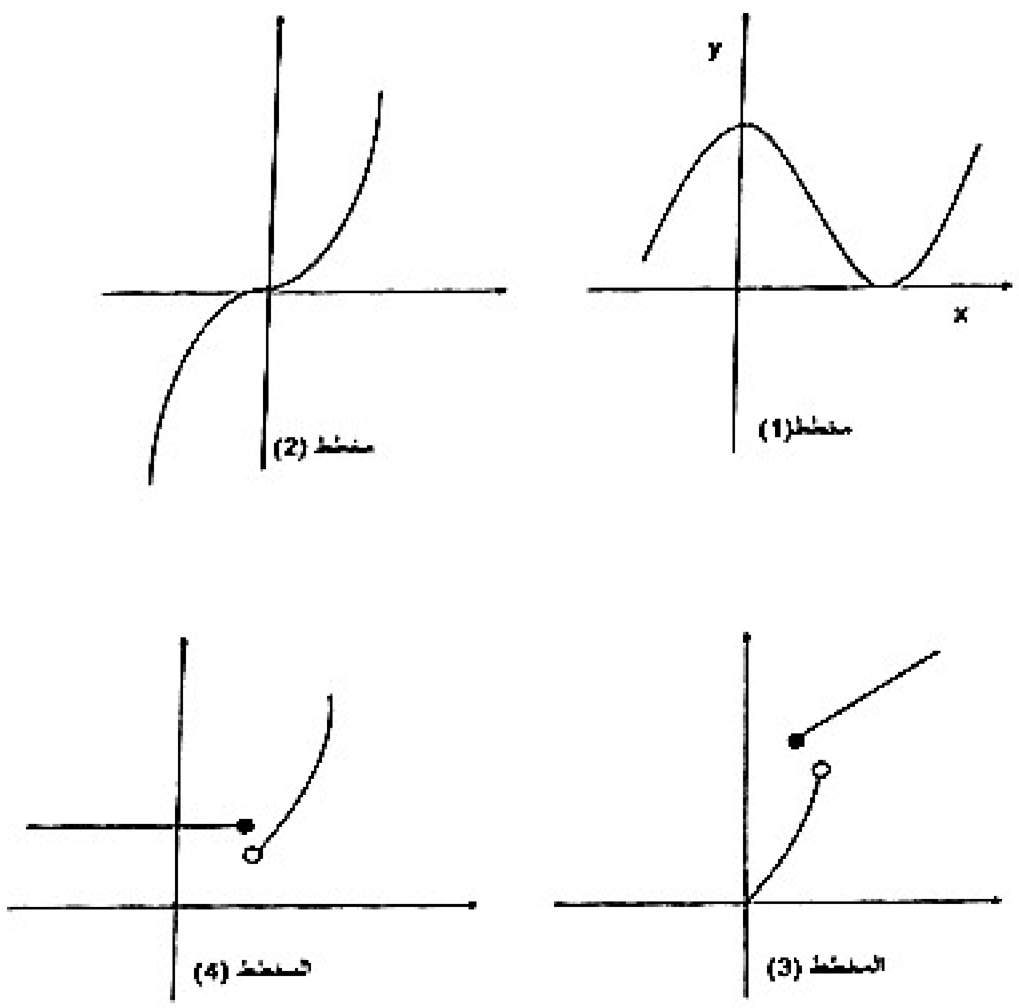
$$|a_n - 0| < \varepsilon, \forall n > W$$

ومنه نحصل على أن:

$$a_n \to 0 .$$

4.4 الدوال المستمرة ومتتابعة كوشي
Continuaus Functions and Cauchy Sequence

من خلال ملاحظة مجموعة المخططات التالية للدوال، يمكن ملاحظة الفرق بينهما، حيث مخطط (1) ومخطط (2) تسمى دوال مستمرة والمخطط (3) والمخطط (4) تسمى دوال غير مستمرة في x_1 و x_2.



1.4.4 تعريف

إذا كان كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاء أ متريا، فان الدالة $f:X\to Y$ تكون مستمرة عند النقطة $a\in X$ إذا وفقط إذا كان لكل متتابعة $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث $x_n\in X$ وان $x_n\to a$ يؤدي إلى $f(x_n)\to f(a)$.

ويقال للدالة f انها مستمرة إذا كانت مستمرة في كل نقطة من نقاط منطلقها

2.4.4 مثال:

نلاحظ الدالة $f:R\to R$ حيث أن $f(x)=x^2$

لنأخذ $x=2$ ولتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ أية متتابعة في نطاق f أي في D_f بحيث أن $x_n\to 2$.

الان لو أخذنا المتتابعة $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ نلاحظ أن هذه المتتابعة هي $\{x_n^2\}_{n=1}^{\infty}$،

وبما أن $x_n\to 2$ فان $x_n^2\to 4$.

ولكن

$$f(2)=2^2=4$$

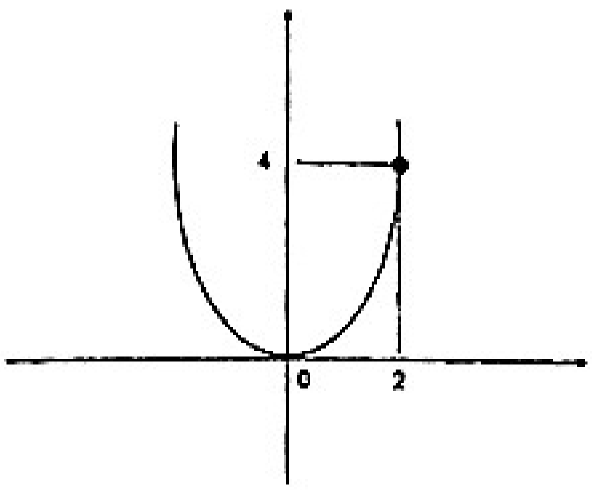
أي أن

$$f(x_n)\to f(2)$$

وبهذا نلاحظ بان عندما $x_n\to 2$ فان

$$f(x_n)\to f(2)$$

أي أن الدالة مستمرة عند النقطة $x=2$ وهكذا الحال لو أخذنا أية نقطة في نطاق الدالة f فأنها سوف تكون مستمرة وبهذا فان الدالة f مستمرة بصورة عامة.



3.4.4 تعريف:

إذا كان كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاءً متريّاً، فإن الدالة $f:X\to Y$ غير مستمرة عند النقطة $a\in X$ إذا كانت المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث $x_n\to a$ تؤدي إلى $f(x_n)\not\to f(a)$.

4.4.4 مثال:

لتكن $f:R\to R$ معرفة كالآتي:

$$f(x)=\begin{cases} x & , \quad x>0 \\ 2 & , \quad x=0 \\ x+7 & , \quad x<0 \end{cases}$$

i) عندما $x>0$ نأخذ أية نقطة مثل x=3 و تأخذ أية متتابعة مثل $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث أن $x_n\to 3$، نلاحظ أن $f(x_n)=x_n$ ومنه ينتج أن $f(x_n)=3$ وبما أن $f(3)=3$ وعليه سيكون $f(x_n)\to f(3)$ أي أن f مستمرة عند النقطة x=3، وهكذا الحال بالنسبة إلى نقطة في الفترة: $(0,\infty)$.

ii) عندما $x=0$ ، نأخذ المتتابعة $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ نلاحظ ان $\frac{1}{n}\to 0$ وبما أن $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

لكل $n\in N$ فان

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

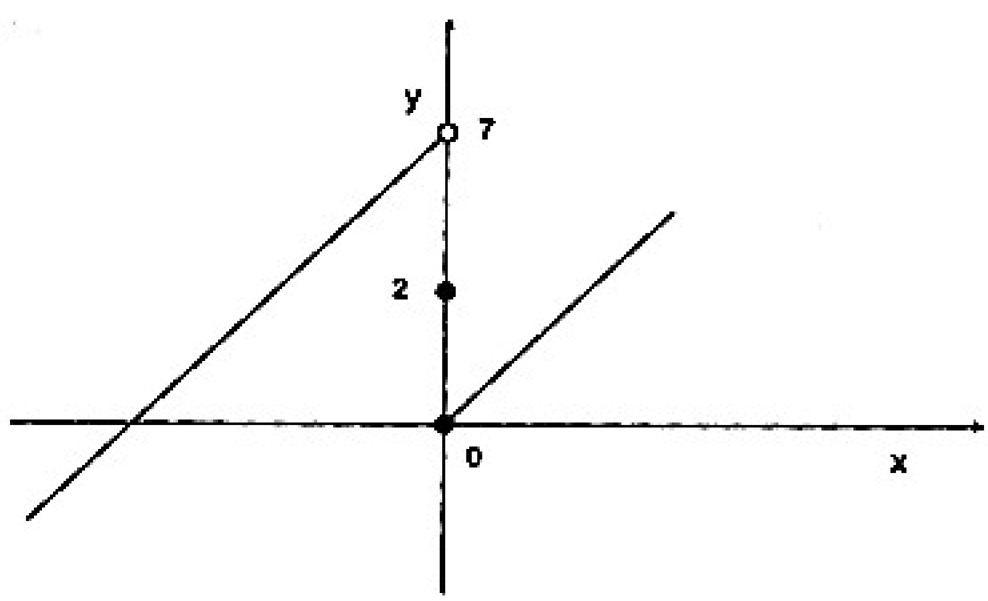
وبهذا سيكون

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$$

ولكن $f(0)=2$ وان $2\neq 0$ ، أي أن

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \nrightarrow f(0) \text{ و } \frac{1}{n}\to 0$$

وعليه فان الدالة غير مستمرة عند $x=0$ ، كما موضح في المخطط التالي:



5.4.4 تعريف

لتكن $K\subset R$ وان $a\in R$ ، فأننا نقول أن K ضاحية إلى a إذا وفقط إذا كان K^c هو جوار إلى a.

6.4.4 مثال:

إذا كانت $K=[3,4]$ وان $a=5$ فإننا نلاحظ بان K هي ضاحية إلى a.

7.4.4 مبرهنة

تكون $K \subset R$ ضاحية إلى $a \in R$ إذا وفقط إذا كانت K مجموعة مغلقة لا تحتوي على a.

البرهان:

باستخدام التعريف يمكننا البرهنة ويترك البرهان للطالب.

8.4.4 مبرهنة

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة في R فأنها تكون متقاربة إلى a إذا وفقط إذا لم تكن أية ضاحية إلى a حاوية على متتابعة جزئية من $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

البرهان:

(i) لنفرض أن $a_n \to a$، وان K ضاحية إلى a حسب المبرهنة (7.4.4) سوف يكون K^c جوار إلى a، وان $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ تكون محتواة في K^c أي أن K لا يحتوي أية متتابعة جزئية من $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(ii) لنفرض أن $N(a,\varepsilon)$ أي جوار إلى a، فعلية سيكون $N^c(a,\varepsilon)$ هو ضاحية إلى a وحسب الفرضية سيكون $N^c(a,\varepsilon)$ لا يحوي أية متتابعة جزئية من $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ أي أن $N^c(a,\varepsilon)$ يحوي على الأغلب عدد منته من حدود $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ أي أن $a_n \to a$.

9.4.4 مبرهنة

لتكن $A\subset R$ و $B\subset R$ وان $f:A\rightarrow B$، إذا كانت f مستمرة عند a، حيث K أية ضاحية إلى $f(a)$ فان $f^{-1}(K)$ هي ضاحية إلى a.

البرهان:

لنفرض أن $H\subset f^{-1}(K)$ وعليه $f(H)\subset K$، والان لنفرض أن $\overline{H}$ ليست ضاحية إلى a وعليه سيكون $a\in\overline{H}$ إذن يوجد $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث

$$a_n\in H\ \forall\ n\in N$$

وكذالك

$$a_n\rightarrow a.$$

وبما أن f مستمرة عند a فان

$$f(a_n)\rightarrow f(a)$$

ولكن $f_{(H)}\subset K$ وعليه:

$$f(a_n)\in K\ \forall\ n\in N$$

وهذا محال (حسب النظرية (8.4.4)) لان K ضاحية إلى $f_{(a)}$ إذن $\overline{H}$ يجب أن تكون ضاحية إلى a.

10.4.4 مبرهنة

لتكن $A\subset R$ و $B\subset R$ وان $f:A\rightarrow B$ لأي $a\in A$ إذا كانت K أية ضاحية إلى $f(a)$ فان $f^{-1}(K)$ ضاحية إلى a.

البرهان:

لـتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعـة فـي A بحيـث أن $a_n \to a$ يجـب أن نبـرهن أن $f(a_n) \to f(a)$ ، ولهذا نفرض أن:

$$f(a_n) \text{ not } \to f(a)$$

إذن توجد K ضاحية إلى $f(a)$ بحيث أن K تحتوي على متتابعة جزئية مـن $f(a_n)$ ولـتكن $f(a_{ni})$ ، وعليـه $f^{-1}(K)$ تحـوي علـى المتتابعـة الجزئيـة $\{a_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ ، أي أن $f^{-1}(K)$ هي ليست ضاحية إلى (a) ، وهذا تناقض.

إذن يجب أن تكون $f(a_n) \to f(a)$

اي أن f مستمر عند a.

11.4.4 مبرهنة

تكون الدالة $f : A \to B$ دالة مستمرة إذا وفقط إذا تحقق احد الـشرطيين التاليين:

(1) إذا كان $K \subset B$ و K مجموعة مغلقة فان $f^{-1}(K)$ مغلقة في A.

(2) إذا كان $K \subset B$ و K مجموعة مفتوحة في B فان $f^{-1}(K)$ مفتوحة في A.

البرهان:

(i) لنفرض أن f مستمرة وسنبرهن أن الشرط (1) يحقق.

أي أننا نفرض أن $K \subset B$ وان K مغلقة في A.

لنفرض أن $H = f^{-1}(K)$ ليست مجموعة مغلقة في A.

وبما أن $H \subset \overline{H}$ و $H \subset A$ فعليه سوف يكون $H \subset \overline{H} \cap A$ وبما أن H غير مغلقة في A، فان هذا يؤدي إلى وجود نقطة مثل a بحيث أن :

$$a \in \overline{H} \cap A \wedge a \in H$$

وبما أن

$$f(H) = K \cap f(a)$$

وكذالك $a \in H$، فان هذا يؤدي إلى أن

$$f(a) \in K = \overline{K} \cap B$$

فعليه $f(a) \in \overline{K}$، أي أن $\overline{K}$ هو ضاحية إلى $f(a)$.

ومنه نحصل على أن $\overline{H}$ هو ضاحية إلى a، وهذا غيــر ممكــن وذلــك لان $a \in \overline{H}$.

اذن H مجموعة مغلقة في A

(ii) نفرض أن $a \in A$ وسنبرهن على أن f مستمرة في a علـــى فــرض أن الشرط (1) يحقق.

لتكن W ضاحية إلى $f(a)$، $K = \overline{W} \cap B$ سنبرهن أن K هي مجموعة مغلقه في B.

لتكن $H = f^{-1}(K)$. وبما أن الشرط (1) متحقق، إذن

$$H = \overline{H} \cap A$$

وسنثبت أن $\overline{H}$ هي ضاحية إلى a، وبما أن W هي ضاحية إلى $f(a)$

مغلقه سيكون $f(a)\notin W$.

ومن تعريف K نحصل على $f(a)\notin k$ وبما أن $H=f^{-1}(a)$ سنحصل على $a\notin H$. لكن $a\in A$ وباستخدام $H=\overline{H}\cap A$ نحصل على $a\notin\overline{H}$ فعليه سيكون $\overline{H}$ هي ضاحية إلى a.

وأخيراً سوف نبرهن أن $\overline{f^{-1}(w)}$ هي ضاحية إلى a.

وبما أن w هي ضاحية إلى $f(a)$. وكذلك $w=\overline{w}$.

$$K=\overline{W}\cap B=W\cap B$$

$$\therefore \overline{H}=\overline{f^{-1}(K)}=\overline{f^{-1}(W\cap B)}=f^{-1}(W)$$

وباستخدام مبرهنة (10.4.4) نحصل على أن $f^{-1}_{(W)}$ هي ضاحية إلى a. أي أن f مستمرة في a.

يترك برهان الجزء الثاني من النظرية إلى الطالب.

12.4.4 تعريف

لتكن $f:A\to R$ داله حقيقية وان $a\in A$، فإننا نقول أن الدالة f مستمرة عند النقطة a إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ حيث أن:

$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ كلما كان $|x-a|<\delta$

13.4.4 تعريف

لتكن $f:A\to R$ داله عدديه، نقول أن الدالة f مستمرة منتظمة إذا وفقط إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ حيث أن $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ كلما كان $|x_1-x_2|<\delta$ لكل $x_1,x_2\in A$.

14.4.4 مثال:

لتكن $f : R \to R$ داله بحيث أن:

$$f(x) = ax + b$$

وسنبرهن الان بأن f داله مستمرة منتظمة.

لنفرض أن:

$$a \neq 0 \ ، \varepsilon > 0$$

نخذ

$$\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$$

إذا كان $a = 0$ نخذ $\delta = 1$

نفرض أن $x_1 , x_2 \in R$ بحيث أن

$$|x_1 - x_2| < \delta$$

لكن

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |(ax_1 + b) - (ax_2 + b)| \\ &= |ax_1 - ax_2| = |a(x_1 - x_2)| \\ &= |a||x_1 - x_2| < |a|.\delta \\ &= |a|.\frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon \end{aligned}$$

$$\therefore |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

أي أن f داله مستمرة منتظمة حسب التعريف (13.4.4)

15.4.4 ملاحظة:

من التعريف (13.4.4) نستنتج أن كل داله $f : A \to R$ مستمرة منتظمة علـى A تكون مستمرة منتظمة على A.

16.4.4 مثال:

نلاحظ الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ على الفترة $(0,1)$.

هذه الدالة مستمرة عند كل نقطة من نقاط الفترة $(0,1)$.

لنفرض أن $x_2\in(0,1)$ حيث

$$|x_1-x_2|<\delta$$

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|=\left|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right|<\frac{\delta}{x_1x_2}$$

إذا اخترنا $\frac{x_2}{2}>\delta$ فلابد أن يكون $\frac{x_2}{2}<x$ من الفرض حيث $|x_1-x_2|<\delta$.

إذن

$$\frac{\delta}{x_1x_2}<\frac{2\delta}{x_2^2}$$

الان نختار $\left(\frac{x_2^2}{2}\right)\varepsilon=\delta$، وبذلك يكون

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon \quad \text{كلما كان} \quad |x_1-x_2|<\delta$$

أي أن f مستمرة عند النقطة x_2 في الفترة $(0,1)$.

17.4.4 ملاحظة:

توجد دوال مستمرة على مجموعة ما ولكنها ليست مستمرة منتظمة على تلـك المجموعة.

18.4.4 مثال:

الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ على الفترة $(0,1)$ مستمرة فإذا أعطـــي $\varepsilon=\frac{1}{2}$ ، $\delta>0$،

فأننا نستطيع اختيار n بحيث يكون $x_1=\frac{1}{n}$ ويكون $x_1<\delta$

فإذا كان $x_2=\frac{1}{n+1}$، فان $x_1,x_2\in(0,1)$

$$|x_1-x_2|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right|=\left|\frac{1}{n(n+1)}\right|<\frac{1}{n}<\delta$$

ولكن

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|n-(n+1)|=1>\varepsilon$$

إذن f ليست مستمرة منتظمة على الفترة $(0,1)$.

19.4.4 مبرهنة

إذا كانت $f:A\to R$ داله مستمرة على A وكانت A مجموعة مرصوصة فان f مستمرة منتظمة على A.

البرهان:

إذا أعطي $\varepsilon>0$، فنختار لكل $x\in A$ للعدد δ بحيث أن $|x-y|<\delta$ يؤدي إلى أن $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$

المجموعات $N\left(x,\frac{\delta}{2}\right)$ تشكل غطاء مفتوح للمجموعة A وبما أن A مجموعة متراصة، فانه يوجد غطاء جزئي منته $\left\{N\left(x_i,\frac{\delta_i}{2}\right)\right\}_{i=1}^{n}$ يغطي المجموعة A

لنفرض أن

$$\delta = \min\left\{\frac{\delta_1}{2}, \frac{\delta_2}{2}, \ldots\ldots, \frac{\delta_n}{2}\right\}$$

إذا كان $|x-y| < \delta$ فان هناك i حيث

$$|x - x_i| < \frac{\delta_i}{2}$$

ومن ذلك نجد أن

$$|x_i - y| \le |x_i - x| + |x - y| < \delta_i$$

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

لكل $x, y \in A$

وهذا يعني أن f مستمرة بانتظام على A.

20.4.4 تعريف

الدالة $f : A \to R$ تحقق شرط لبشز (Lipschiz) على المجموعة A إذا كان هناك ثابت M بحيث أن:

$$|f(x) - f(y)| \le M|x - y|, \forall x, y \in A$$

21.4.4 ملاحظة:

إذا حققت الدالة $f : A \to R$ شرط البشز على لمجموعة A، فأنها تكون مستمرة بانتظام على A.

22.4.4 مثال:

لتكن الدالة $f : A \to R$ تحقق شرط البشز على المجموعة A.

نفرض أن $\varepsilon > 0$، فنختار δ بحيث يكون $|x-y| < \delta$ لكل $x, y \in A$

ألان

$$|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$$

ومن شرط البشز، إذا كان $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ ، فان

$$|f(x)-f(y)| < M.\frac{\varepsilon}{M} \forall x, y \in A$$

إذن f مستمرة منتظمة على A .

23.4.4 ملاحظة:

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة على R . سبق وان درسنا الشرط الذي يجعل وجود $a \in R$ بحيث أن $a_n \to a$ مبرهنة (25.2.4). وألان سنحاول نجد الشرط اللازم والكافي كما سنقدم تعريفاً جديداً وهو تعريف متتابعة كوشي وسنبرهن انه إذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة و $a \in R$ بحيث $a_n \to a$ إذا وفقط إذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة كوشي.

24.4.4 تعريف:

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة على R يقال لهذه المتتابعة أنها متتابعة كوشي إذا وفقط إذا كان كل $\varepsilon > 0$ يوجد $W \in N$ بحيث

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \forall n > W, \forall m > W$$

25.4.4 مثال:

المتتابعة $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة كوشي

البرهان:

لتكن $\varepsilon > 0$. وباستخدام حقيقية (12.3.1) فانه يوجد $W \in N$

بحيث أن

$$\frac{1}{W} < \frac{\varepsilon}{2}$$

لتكن كلاً من $n,m \in N$ بحيث أن $m > W, n > W$

وعليه سيكون

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{W} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{و} \quad \frac{1}{m} < \frac{1}{W} < \frac{\varepsilon}{2}$$

نلاحظ أن

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{-1}{m}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right|$$
$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وعليه سيكون

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon, \forall n > W, \forall m > W$$

أي أن $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة كوشي.

26.4.4 مثال:

المتتابعة $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة كوشي.

البرهان:

لتكن $\varepsilon > 0$. وباستخدام الحقيقية (12.3.1) فانه يوجد $W \in N$

بحيث أن

$$\frac{1}{W} < \frac{\varepsilon}{2}$$

لتكن كلاً من $n, m \in N$ حيث

$$m > W, n > W$$

نلاحظ أن:

$$2^n > 2^W \text{ و } 2^m > 2^W$$

وعليه سنحصل على:

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^W} < \frac{1}{W} < \frac{\varepsilon}{2}$$

وان:

$$\frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^W} < \frac{1}{W} < \frac{\varepsilon}{2}$$

نلاحظ أن

$$\left|\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m}\right| \le \left|\frac{1}{2^n}\right| + \left|\frac{1}{2^m}\right|$$
$$= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ومنه نحصل على أن

$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة كوشي.

27.4.4 مبرهنة:

إذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة على R وان $a_n \to a$ فإن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة كوشي.

البرهان:

لتكن $\varepsilon > 0$ وبما أن $a_n \to a$

إذن يوجد $W \in N$ حيث أن

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > W$$

لنفرض أن كلاً من $n, m \in N$ وان كل منهما اكبر من W فان :

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \le |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وعليه سيكون:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \forall n > W, \forall m > W$$

أي أن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة كوشي.

28.4.4 مبرهنة:
إذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة كوشي فان $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة.

البرهان:

بما أن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة كوشي.

إذن يوجد $W \in N$ بحيث أن

$$|a_{n+K}| < 1, \forall n > W, \forall K > 0$$

لنفرض أن

$$M_1 = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots\dots, |a_{W+1}|, \dots\dots, |a_{W+K}|\}$$

نلاحظ أن

$|a_n| \le M_1$ لكل $1 \le n < w+1$

وبما أن $|a_{n+K} - a_n| < 1$ لكل $n > W$ فتكون هذه العلاقة صحيحة اذا كانت

$n = W + 1$

وعليه سيكون

$$\left|a_{W+1+K} - a_{W+1}\right| < 1$$

لكل $K > 0$ ، ومنه ينتج

$$\left|a_{W+1+K}\right| < \left|a_{W+1}\right| + 1 \leq M_1 + 1$$

وعليه سيكون:

$$\left|a_n\right| \leq M_1 + 1 \quad \forall \quad n > W + 1$$

نخذ $M = M_1 + 1$ ومنه سيكون:

$$\left|a_n\right| \leq M \quad \forall \quad n > W$$

وهو المطلوب.

29.4.4 ملاحظة:

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة على R لندرس المتتابعة $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ نلاحظ أن كل حد من هذه المتتابعة هو حد في المتتابعة الأولي. تسمى هذه المتتابعة متتابعة جزئية في $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

وكمثال على ذلك:

المتتابعة $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة جزئية من $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

ولذلك المتتابعة $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة جزئية من $\{n\}_{n=1}^{\infty}$.

30.4.4 تعريف:

المتتابعة $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة جزئية من $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (Subseguence) إذا وفقط إذا وجدت متتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث أن

$$a_{n_i} = b_i, \forall i \in N$$

31.4.4 ملاحظة:

للبرهنة على أن كل متتابعة كوشي يجب أن تتقرب من عدد ما، يجب أن نبرهن أولا أن كل متتابعة لها متتابعة جزئية رتيبة ومنها سنبرهن أن كل متتابعة كوشي لها متتابعة جزئية رتيبة.

وبما أن كل متتابعة كوشي هي محدودة وبواسطة مبرهنة(1.1.3) نحصل على أن كل متتابعة كوشي نقترب من احدي نقاط R.

32.4.4 مبرهنة:

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة فان $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ لها متتابعة جزئية رتيبة.

البرهان:

نلاحظ أن إحدى ما يلي تحقق فقط.

(1) يوجد $W \in N$ بحيث لا يوجد حد من حدود $\{a_{W+1}, a_{W+2}, \ldots\ldots\}$، هو حد أدنى إلى $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(2) لكل $W \in N$ يوجد حد من حدود المتتابعة $\{a_{W+1}, a_{W+2}, \ldots\ldots\}$، بحيث يكون حد أدنى لهذه المتتابعة.

لنفرض أن (1) يحقق على المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

نفرض أن

$$a_{W+K_1} = b_1$$

إذن يوجد عدد صحيح K_2.

بحيث أن

$$a_{W+K2} < b_1$$

لنفرض أن

$$a_{W+K2} = b_2$$

إذن يوجد عدد صحيح $K_2 < K_3$ بحيث أن

$$a_{W+K3} < b_2$$

لنفرض أن:

$$a_{W+K3} = b_3$$

وبصورة عامة إذا عرف bi و a_{W+K_i}

إذن يوجد عدد صحيح $K_{i+1} > K_i$ بحيث أن

$$a_{W+K_{i+1}} < bi$$

لنفرض أن:

$$a_{W+K_{i+1}} + 1 = bi + 1$$

نلاحظ أن $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ هي رتيبة تزايدية.

لنفرض ألان أن (2) تحقق على المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ لنفرض أن a_{K_1} هو حد من المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث انه يكون حد أدنى إلى المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

بواسطة (2) يوجد حد a_{K_2} من حدود

$$\{a_{K_{i+1}}, a_{K_{i+2}}, \ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

بحيث يكون حد أدنى إلى هذه المتتابعة.

لنفرض أن a_K قد عرف بهذه الطريقة.

بواسطة (2) أيضا يوجد حد $a_{K_{i+1}}$ من المتتابعة

$$\{a_{K_{t+1}}, a_{K_{t+2}}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

بحيث يكون حد أدنى إلى هذه المتتابعة.

وعليه نكون قد عرفنا متتابعة جزئية $\{a_{K_t}\}_{n=1}^{\infty}$ من المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ وهذه المتتابعة الجديدة متتابعة رتيبة أيضا.

33.4.4 مبرهنة:
إذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة كوشي في R فهي متتابعة متقاربه .

البرهان:

بما أن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة كوشي وحسب نظرية (1.1.3) تكون محدودة.

وباستخدام نظرية (25.2.4) يوجد $a \in R$ ومتتابعة جزئية رتيبة $\{a_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ من $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث أن $a_{n_t} \to a$ ،

سنبرهن ألان أن

$$a_n \to a$$

لنفرض أن $\varepsilon > 0$

إذن يوجد $W_1 \in N$ بحيث أن

$$|a_{n_t} - a| < \varepsilon \quad , \quad \forall \quad n_t > W_1$$

وبما أن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتالية كوشي يوجد $W_2 \in N$ بحيث أن

$$|a_{n+K} - a_n| < \varepsilon, \forall n > W_2, K > 0$$

نفرض ان W تمثل Subscript الى احد حدود المتتابعة $\{a_m\}_{n=1}^{\infty}$ والذي ينـصف ب $W > W_1$ و $W > W_2$

وعليه سنحصل على:

$$|a_W - a| < \varepsilon, |a_{W+K} - a_W| < \varepsilon$$

وبدمج هاتين المتتابعتين نحصل على:

$$|a_{W+K} - a| < 2\varepsilon, \forall K > 0$$

وهذا يعني

$$|a_n - a| < 2\varepsilon . \forall n > W$$

وعليه سنحصل على:

$$a_n \rightarrow a$$

34.4.4 مبرهنة:
اذا كانت $a_n \rightarrow a$ وكانت $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة جزئية من $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ فان $b_n \rightarrow a$.

البرهان:

لتكن $\varepsilon > 0$ وبما ان $a_n \rightarrow a$

اذن يوجد $W \in N$ بحيث

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > W$$

وكذالك يوجد $h \in N$ بحيث ان $a_h = b_n$ لماذا؟

وبما ان $h > n > W$ وعليه سيكون

$$|a_h - a| < \varepsilon, \forall n > W$$

أي ان

$$|b_n - a| < \varepsilon, \forall n > W$$

وهذا يعني

$$b_n \to a$$

35.4.4 ملاحظة:

اذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة وان $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة جزئية من $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ وكانت $b_n \to b$ فهل من الضروري ان تكون $a_n \to b$؟

الجواب: كلا.

36.4.4 مثال:

المتتالية التالية:-

$$\left\{1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad ..\right\}$$

نلاحظ بان هذه المتتابعة لا تقترب من أي عدد لكن المتتابعة

$$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \right\}$$

هي متتابعة جزئية من المتتابعة الأولى وأنها تقترب من الصفر.

5.4 المتتابعات في الفضاء المتري:

Squences in Metric Space

لقد درسنا المتتابعات على الاعداد الحقيقية وعرفنا بعض خواصها والان سنحاول ان نوسع دراستنا السابقة وندرس المتتابعات في الفضاء المتري ونحاول ان نعمم معظم التعاريف الوارده سابقاً في الفضاء المتري.

1.5.4 تعريف:

ليكن (X,d) فضاءً مترياً وان $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة على X. وان $a \in X$ ان العبارة $a_n \to a$ تعني ان:

لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $W \in N$ بحيث:

$$a_n \in S(a,\varepsilon), \forall n > W,$$
$$S(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

2.5.4 تعريف:

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة على X ان العبارة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة كوشي تعني لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $W \in N$ بحيث ان $d(a_n, a_m) < \varepsilon$ لكل $n > W$ و $m > W$.

3.5.4 مبرهنة:

اذا كان (X,d) فضاءً مترياً وان $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة على X و $a_n \to a$ حيث $a \in X$ فان $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة كوشي.

البرهان:

لتكن $\varepsilon > 0$ وبما ان $a_n \to a$ يوجد $W \in N$ بحيث ان:

$$a_n \in S\left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right), \forall n > W$$

لتكن كل من $m, n \in N$ بحيث $n > W$ و $m > W$.

نلاحظ ان:

$$a_n \in S\left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right), a_m \in S\left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

وبما ان

$$d(a_n, a_m) \le d(a_n, a) + d(a, a_m)$$

وعليه سيكون

$$d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

أي ان

$$d(a_n, a_m) < \varepsilon$$

أي ان $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة كوشي

وهو المطلوب.

4.5.4 ملاحظة:

برهنا في البند السابق اذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة كوشي على الاعداد الحقيقية فانه يوجد $a \in R$ بحيث ان $a_n \to a$.

ان هذه النظرية ليست صحيحة اذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة كوشي على فضاء متري بصورة عامة والمثال التالي يوضح ذلك.

5.5.4 مثال:

ليكن $X = R/\{0\}$ و d هو القياس الاعتيادي على R.

نجد $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

نلاحظ ان $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ما هي الا متتابعة كوشي، لماذا؟

ولكن لا توجد نقطة في X بحيث ان $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ تقترب منها وذلك لان $0 \notin X$ وان $a_n \to 0$ في R.

6.5.4 تعريف:
اذا كان (X,d) فضاءً مترياً يقال لهذا الفضاء فضاء متكاملاً اذا وفقط اذا كانت كل متتابعة كوشى فى X تقترب فى نقطة من نقاط X.

7.5.4 مبرهنة:
(R,d) فضاء مترى متكامل.

البرهان:

باستخدام مبرهنة (10.4.4) يمكن أثبات البرهنة ببساطة.

ونترك البرهان للطالب.

8.5.4 تعريف:

ليكن (X,d) فضاءً مترياً و $\{y_n\}_{n=1}^{\infty},\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ كل منهما متتابعة كوشي يقال ان $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تكافئ $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ويرمز لهما $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \approx \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ اذا وفقط اذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $W \in N$ بحيث ان:

$$d(x_n, y_n) < \varepsilon, \forall n > W$$

9.5.4 مثال:

لندرس الان المتتابعتين $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

نلاحظ ان كلاً من هاتين المتتابعتين متتابعة كوشي وقد برهن هذا سابقاً.

لتكن $\varepsilon > 0$ ،وباستخدام حقيقة (2.3.1) يوجد $W \in N$ بحيث ان $\frac{1}{W} < 2\varepsilon$.

ليكن $n > W$ نلاحظ ان:

$$d(x_n, y_n) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} < \frac{1}{2W} < \frac{1}{2} \cdot 2\varepsilon = \varepsilon$$

وعليه سيكون

$$d(x_n, y_n) < \varepsilon, \forall n > W$$

تسمى المتتابعة $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعتين متكافئتين.

10.5.4 مبرهنة :

ليكن (X,d) فضاءً مترياً وليكن كل من $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة كوشي فان:

(1) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \approx \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

(2) اذا كان:

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \approx \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ فان $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \approx \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

(3) اذا كان:

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \approx \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \approx \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ فان $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \approx \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$

البرهان:

الفرع الاول والثاني من المبرهنة من السهل إثباته لذا سوف نتركه للطالب ونبرهن الفرع الثالث.

نفرض ان $\varepsilon > 0$

وبما ان

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \approx \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$$

فانه يوجد $W_1 \in N$ بحيث ان

$$d(x_n, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > W$$

وبما ان

$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \approx \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$$

فانه يوجد $W_2 \in N$ بحيث ان

$$d(y_n, t_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > W_2$$

نفرض ان

$$W = \max\{W_1, W_2\}$$

ولنفرض ان $n > W$

نلاحظ ان

$$d(x_n, t_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, t_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

أي ان

$$d(x_n, t_n) < \epsilon, \forall n > W$$

أي ان $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \approx \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$

11.5.4 مبرهنة:

اذا كان (X, d) فضاء متري وكان كـــل مـــن $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعـــة كوشي، فإن $x_n \to p$

$$y_n \to p$$

اذا وفقط اذا كان:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \approx \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$$

البرهان:

(1) لتكن $x_n \to p$ و $y_n \to p$ وليكن $\varepsilon > 0$ اذن يوجد $W_1 \in N$

بحيث ان:

$$d(x_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > W_1$$

وكذلك يوجد $W_2 \in N$ بحيث ان:

$$d(y_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > W_2$$

ليكن

$$W = \max\{W_1, W_2\}$$

ولنفرض ان $n > W$

وبما ان

$W \geq W_1$ و $W \geq W_2$

فعلية سيكون

$n > W_1$ و $n > W_2$

نلاحظ ان

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, p) + d(p, y_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

أي ان

$$d(x_n, y_n) < \varepsilon, \forall n > W$$

أي ان

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \approx \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$$

(2) لتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \approx \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $x_n \to p$ والمطلوب إثبات ان $y_n \to p$.

لتكن $\varepsilon > 0$، وبما ان $x_n \to p$ فانه يوجد $W_1 \in N$ بحيث ان:

$$d(x_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > W_1$$

وبما ان

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \approx \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$$

فانه يوجد $W_2 \in N$ بحيث ان

$$d(x_n, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > W_2$$

لتكن

$$W = \max\{W_1, W_2\}$$

ولنأخذ $n > W$ سيكون $n > W_1$ و $n > W_2$ وكذالك:

$$d(x_n, p) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{و} \quad d(x_n, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ولكن:

$$d(y_n, p) \le d(y_n, x_n) + d(x_n, p) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

أي ان:

$$d(y_n, p) < \varepsilon, \forall n > W$$

أي ان:

$$y_n \to p$$

12.5.4 مبرهنة:

اذا كان (X,d) فضاءً مترياً وكان كـل مـن $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة كوشي فان $\{d(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة كوشي على R.

البرهان:

لتكن $\varepsilon > 0$، وبما ان $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة كوشي

اذن يوجد $W_1 \in N$ بحيث ان:

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n, m > W_1$$

وبما ان $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة كوشي

اذن يوجد $W_2 \in N$ بحيث ان:

$$d(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n, m > W_2$$

لتكن:

$$W = \max\{W_1, W_2\}$$

ولتكن $m, n > W$

فعليه سيكون:

$m > W_2$ ، $m > W_1$ و $n > W_2$ ، $n > W_1$

لاحظ ان

$$\begin{aligned}|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| &\le |d(x_n, y_n)| + |d(x_m, y_m)| \\ &= d(x_n, y_n) + d(x_m, y_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

أي ان

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| < \varepsilon$$

أي ان

$\{d(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة كوشي.

تمارين

(1) اذا كان $a_n \to a$، برهن على انه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $W \in N$ بحيث انه اذا كان كل من $h, k \in N$ وكل منهما اكبر من W فان:

$$\left|a_h - a_k\right| < \varepsilon$$

(2) هل ان المتتالية $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ تقترب نحو P حيث $p \in R$. برهن على صحة اجابتك باستخدام التعريف.

(3) باستخدام التعرف برهن على ان:

$$\frac{2-7n}{1-5n} \to \frac{7}{5}$$

وان

$$\frac{3n}{\left(1+3n^2\right)} \to 0$$

(4) برهن على ان $\left\{\sqrt{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية متباعدة.

(5) اذا كان $a_n \to a$ و $b_n \to b$ وان $a_n \leq b_n$ لكل $n \in N$ برهن على ان $a \leq b$.

(6) برهن على ان المتتالية $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة نحو الصفر اذا كان $|a|<1$ ومتقاربة نحو (1) اذا كان $a=1$ ومتباعدة اذا كان $a=-1$ او $|a|>1$

(7) برهن على ان:

$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \to 0$$

(8) اذا كان كل من $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة وكان $a_n - b_n \to 0$ برهن على ان كل منهما اما متقاربة او متباعدة.

(9) اعط مثالاً توضح فيه ان $(a_n.b_n) \to 0$ وان

$$a_n \not\to 0, b_n \not\to 0$$

(10) برهن انه اذا كان $a_n \to a$ وان $m \in N$ فانه $a_n^m \to a^m$

(11) هل في الامكان ان تكون $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة مع العلم ان $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة و $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ متباعدة؟ وضح ذلك بمثال.

(12) جد غاية المتتابعات الاتية باستخدام البرهنات:

$$\left\{\frac{2n+3n^2}{1+n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}, \left\{\frac{n+3}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\{7n+5\}_{n=1}^{\infty}, \left\{\frac{n-2}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

(13) برهن على انه اذا كان $a_n \to a$ وكانت $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية محدودة فان $(a_n.b_n) \to 0$.

(14) اذا كان كل من $g(x), f(x)$ دوال حقيقية ومستمرة فبرهن على ان كلاً من الدوال التالية مستمرة ايضاً:

$$f(x)+g(x), f(x)-g(x), f(x).g(x), \frac{f(x)}{g(x)} \text{ عندما } g(x) \neq 0$$

(15) اذا كانت $f : R \to R$ حيث ان

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x \geq 1 \\ 3 & , \quad 1 < x < 2 \\ -x+7 & , \quad 2 \leq x < 4 \\ x^2+7 & , \quad 4 \leq x < 5 \end{cases}$$

برهن ان $f(x)$ غير مستمرة عندما $x = 1, x = 2, x = 3, x = 4, x = 5$

(16) لتكن $f : R \to R$ داله عدديه مستمرة ، ولتكن $A \subset R$ برهن ان $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

(17) اذا كانت $f : R \to R$ داله.بحيث ان

$f(x) = x \forall x \in R$

برهن ان f مستمرة منتظمة

(18) اذا كانت $g(x), f(x)$ دالتين مستمرتين منتظمتين على A فبرهن ان $f(x) + g(x)$ داله مستمرة منتظمة على A

(19) اذا كان $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة محدودة برهن من وجود $A \in R$ ووجود متتابعة $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ رتيبة وجزئية من $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث ان $b_n \to A$.

(20) اذا كانت $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة جزئية من $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ وكانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (متقاربة) (متزايدة)، برهن ان $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ لها نفس الخاصية.

(21) برهن ان المتتابعة $\left\{\frac{n^2}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}, \left\{\frac{n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ليست متتابعات كوشي.

(22) اذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ تزايدية وكان $a_n \to a$ برهن ان

$a_n < a, \forall n \in N$

(23) برهن انه اذا كانت المتتابعة محدودة وغير متقاربة يوجد متتابعتين جزئيتين منهما متقاربتان الى نقطتين مختلفتين.

(24) اذا كان E^2 هو المستوي الأقليدي، d هو القياس الاعتيادي فان (E^2, d) هو فضاء متكامل.

المصطلحات العلمية

Associative	التجميع
Absolute Value	القيمة المطلقة
Bbounded Set	مجموعة محدودة
Bounded Above	محدودة من الاعلى
Bounded Below	محدودة من الأسفل
Boundary Points	نقاط الحدود
Bounded founction	دالة محدودة
Completeness aximo	مسلمة الكمال
Closed ray	شعاع مغلق
Closed interval	فترة مغلقة
Clusteer point	نقطة ملاصقة
Closure	مغلق
Compact set	مجموعة مرصوصة
Covering	غطاء
Constant Function	دالة ثابتة
Cauchy sequence	متتابعة كوشي
Complete space	فضاء متكامل
Co-domain	المستقر
Domain	منطلق
Distributive	التوزيع
Deleted neighbourhood	الجوار المحذوف
Derived set	المجموعة المشتقة
Discrete set	مجموعة متفردة
Dense in itself	كثيفة بنفسها
Decreasing	تنازلية

Exterior point	نقاط خارجية
Function Greatest Lower Bound	داله اكبر حد أدنى
Field	حقل
Idetity elements	عناصر محايدة
Inverse elements	النظائر
Isolated	معزول
Interior	داخل
Image	صورة
Natural numbers	اعداد طبيعية
Negative Reals	الاعداد الحقيقية السالبة
neighbourhood	جوار
Metric space	فضاء متري
Metric founction	دالة مسافية (مترية)
Ordered	مرتب (رتبه)
Open interval	فترة مفتوحة
Open cover	غطاء مفتوح
Squence	متابعة (متتالية)
Sub cover	غطاء جزئي
Rattional number	اعداد نسبية
Least Upper bound	أصغر حد أعلى
Lower bound	حد أسفل (أدنى)
Topology of Reals	تبولوجياالأعداد الحقيقية
Topology	التبولوجي
Topological space	فضاء تبولوجيا
Positive reals	الاعداد الحقيقية الموجبة
Perfect set	المجموعة التامة

المراجـع

1) Elementary Real Analysis K.W. Anderson, D.W.Hall, McGrawHill Kogakusha Ltd., 1972.

2) Elementary topology, by M.C.Gemignani, Addison-Wesley Publishing Company, 1972.

3) Foundation of Genaral Topology, by W.J.Pervin, Academic Press, 1964.

4) Introduction to Topology and modern Analysis, by G.Simmons, McGraw-Hill Comp., 1963.

5) Mathematical analysis by T.m.Apostal, Addison – Wesly Publishing company Inc., 1957.

6) Theory of Functions of Real Variables, by L.M.Graves. McGraw – Hill Book Company, 1965.

7) Topology A First Course, by J.R.Munkres, Prentice Hall, inc., Englewood Cliffs.New Jersey, 1975.

تنفيذ وطباعة

مجموعة النيل العربية

"نشر - طباعة - توزيع"

ص. ب: 4051 الحي السابع/ م. نصر 11727 القاهرة/ ج.م.ع.

هاتف: 5-26717134 202+ فاكس: 26717135 202+

E-mail: info@arabnilegroup.com

ARAB NILE GROUP

Print, Pub., Dist.

P.O. Box: 4051. 7th District-Nasr City-11727 Cairo-Egypt

Tel: +202 26717134-5 Fax: +202 26717135

E-mail: sales@arabnilegroup.com

www.arabnilegroup.com

يسرنا أن نقدم هذا الكتاب إلى الطالب الجامعي والقارئ بصورة عامة مساهمة منا في توفير الكتب العلمية باللغة العربية للمكتبة العربية وتسهيلاً للفهم والاستيعاب لدى طلبة الجامعات والمعاهد العليا.

الرقم الدولي ردمك: I.S.B.N.:978 - 9959 - 891 - 07 - 5

رقم الإيداع : 995 دار الكتب الوطنية - بنغازي