مجلة الدراسات الاقتصادية –كلية الاقتصاد –جامعة سرت المجلد السابع – العدد الثاني
Economic Studies Journal (ESJ), Faculty of Economics, Sirte University (Vol 7 , No 2)
https://doi.org/10.37375/esj.v7i2.2951
Oct 2024

دراسة نظرية لتصميم معيار يسهم في تقليص عدد تفريعات طريقة التفريع والتحديد (B&B) للمشاكل الخطية من نوع (m×2)

د. عبد الله محمد الشيخ[1]
قسم إدارة الأعمال ، كلية الاقتصاد والعلوم السياسية
جامعة مصراتة ، مصراتة ، ليبيا
a.elshaikh@eps.misuratau.edu.ly

د. عمر محمد الرمالي[2]
قسم إدارة الأعمال ، كلية الاقتصاد والعلوم السياسية
جامعة مصراتة ، مصراتة ، ليبيا
o.elramalli@eps.misuratau.edu.ly

تاريخ الاستلام 29-04-2024 تاريخ الموافقة 14-08-2024

الملخّص

تعتبر طريقة التفريع والتحديد (Branch and Bound Method) أهم الطرق المستخدمة في حل مشاكل برمجة العدد الصحيح ، وتستخدم عندما يكون حل المشكلة غير منطقي من الناحية الفيزيائية، بمعنى عندما تكون متغيرات المشكلة غير قابلة للتجزئة ، وتبدأ آلية عمل هذه الطريقة انطلاقاً من الحل الأمثل (Non-int)، وذلك بتفريع المشكلة إلى مشكلتين فرعيتين ، وهذا يعني تجزئة منطقة الحلول الممكنة لمنطقتين، ومن تم إيجاد الحل الأمثل لهاتين المشكلتين كلاً على حدة، ويتم الاستمرار في تفريع المشاكل الفرعية وإيجاد حلولها. ويتم التوقف عن سلسلة التفريعات في حالة عدم وجود حل للمشكلة الفرعية أو عندما تكون قيم حلها قيم صحيحة (Integer). إن عدد المشاكل الفرعية الناتجة من عملية التفريع تزداد بشكل كبير بزيادة عدد متغيراتها وعدد قيودها، وقد توصل الشيخ وأخرون (يوليو 2022) لتحديد المعايير (Criterions) التي يتم استخدامها في بعض الحالات في تحديد المشكلة الفرعية الواجب تفريعها (المشكلة المرشحة لاحتواء الحل الأمثل *Int*)) ، والتوقف عن تفريع الأخرى (التي لا تحتوي على هذا الحل) ، وفي هذه الورقة تم تصميم معيار أخر لتقليص عدد التفريعات التي عجزت عليها المعايير المستخدمة في الورقة المذكورة ، بهدف توفير الوقت والجهد اللازم لحل المشكلة (تقليص شجرة التفريعات)، حيث يمكن عن طريق استخدام هذا المعيار تقليص ما يقارب على 25% من عدد التفريعات.

الكلمات المفتاحية

التفريع والتحديد، المشاكل الفرعية، (Non-int)

A Theoretical Study on Designing a Criterion for Reducing the Number of Branches in the Branch and Bound (B&B) Method for (2×m) Linear Problems

Dr. Abdalla Mohamed Elshaikh[1] Dr. Omer Mohamed Elramalli [2]

Abstract

The Branch and Bound Method is considered the most important approach for solving integer programming problems. It is particularly useful when the problem's solution is physically infeasible, meaning the problem's variables are indivisible. The method begins by finding the non-integer optimal solution (Non-int) and then branching the problem into two subproblems, effectively dividing the feasible solution space into two regions. The optimal solutions for these subproblems are found individually, and the process of branching and solving continues. The branching sequence stops when a subproblem has no feasible solution or when its solution yields integer values. The number of subproblems generated through branching increases significantly with the number of variables and constraints. Sheikh et al. (July 2022) identified criteria for selecting the subproblem most likely to contain the optimal integer solution and stopping the branching for others that do not. In this paper, we propose an additional criterion aimed at reducing the number of branches, where previous criteria have been insufficient. This new criterion can reduce the number of branches by approximately 25%, thereby saving time and effort in solving the problem (pruning the branch tree).

Keywords

-Branch and Bound ethod
-Subproblems
Non-int-

مجلة الدراسات الاقتصادية –كلية الاقتصاد – جامعة سرت المجلد السابع – العدد الثاني
Economic Studies Journal (ESJ), Faculty of Economics, Sirte University (Vol 7 , No 2)
https://doi.org/10.37375/esj.v7i2.2951
Oct 2024

1. المقدمة

تُعد البرمجة الخطية (Linear Programming) (LP) واحدة من أهم وأشهر أدوات بحوث العمليات، تُستخدم هذه الأداة في حل المشكلات التي تتميز بوجود علاقات خطية بين متغيراتها القرارية (Decision Variables)، وذلك بتحويل المشكلة إلى نموذج رياضي يتضمن قيودًا (Constraints) على شكل معادلات خطية تمثل الحدود أو الشروط الواجب حل المشكلة في ظلها ، بالإضافة إلى معادلة خطية أخرى (Objective Function) تمثل الهدف المطلوب (*Max or Min*)، ومن تم يتم استخدام بعض الطرق كطريقة السمبلكس (Simplex Method) للوصول إلى الحل الأمثل (Optimal Solution) أو القريب من الأمثل الخاص بالمشكلة ، إلا أنه في أحياناً كثيرة تكون قيم الحل للمتغيرات القرارية قيم غير صحيحة (كسور) ، وهو ما يعرف بالحل (*Non-int Solution*)، وفي الحالات المنفصلة (Discrete Cases) ا يكون الحل (*Non-int*) غير منطقي ، كأن يكون الحل انتاج (5.48) سفينة حجم صغيرة وإنتاج (3.67) سفينة حجم كبير ، فهذا الحل الذي يحتوي على كسور غير منطقي تطبيقه على أرض الواقع . والجدير بالذكر هنا إن استخدام عملية التقريب الاعتيادية قد لا تكون مجدية اقتصادياً، كما إن التقريب للحد الأعلى سيكون غير ممكن (خارج الحدود والإمكانيات المتاحة، وهذا ما يعرف (Infeasible Solution) ، كما أن التقريب للحد الأدنى سيعطي حل ممكن (Feasible Solution) ، إلا إنه يمكن أن يؤدي إلى عدم الاستغلال الأمثل للموارد .

لذلك فقد عمل عض العلماء على اكتشاف بعض الطرق الرياضية للوصول إلى تقريب الحل الأمثل غير الصحيح (*Non-int*) إلى حل أمثل صحيح (Int) في ظل الاستغلال الأمثل للموارد ، ومن أهم هذه الطرق وأكثرها استخداماً هي طريقة التفريع والتحديد (Branch and Bound Method) ويرمز لها بـ(B&B) ، إن الفكرة الكامنة وراء هذه الطريقة (B&B) هي تجزئة أو تفريع (Branched) المشكلة إلى سلسلة من المشاكل الفرعية، عن طريق إضافة قيود على المشكلة الرئيسية، بحيث يُكَون كل قيد مع قيود المشكلة الأساسية مشكلة فرعية، وذلك بهدف التخلص من الحل (*Non-int*) وبالتالي الحصول على أفضل حل (*Int*) للمشاكل الفرعية ، ومن ثم المفاضلة بين هذه الحلول (*Int*) لاختيار أفضل حل (*Int*) من بينها ليكون هو الحل الأمثل (*Int*) للمشكلة الرئيسية ، وتتوقف عملية تفريع في المشاكل الفرعية عندما تكون كل قيم الحل لمتغيراتها قيم صحيحة (*Int*) أو عندما يكون الحل (*Int*) للمشكلة الفرعية حل غير ممكن (Infeasible Solution) ، والذي يعني بيانياً عدم وجود منطقة حلول ترضي كافة قيود المشكلة، بسبب تعارض القيد المضاف مع قيد أو أكثر من قيود المشكلة الرئيسية .

والجدير بالذكر هنا أن عملية التفريع تتطلب إجراء بعض العمليات الحسابية، وتزداد هذه العمليات مع زيادة سلسلة التفريعات، كما أن دالة الهدف للمشاكل الفرعية تنخفض جودتها مع زيادة السلسلة (شجرة التفريعات)، بمعنى أنه في حالة التعظيم (Maximization) تنخفض قيم دالة الهدف مع تزايد التفريعات (المشاكل الفرعية)، لأنه كلما توسعنا في عملية التفريع يعني إضافة قيود جديدة على المشكلة وهذا طبعاً يعني استبعاد الحلول المثلى والانتقال إلى حلول أقل جدوى، وبنفس المنطق يحدث العكس في حالة التقليل (Minimization) فتزداد قيم دالة الهدف مع زيادة الاستمرار في عملية التفريع (تكون قيم دالة الهدف للمشاكل الفرعية أكبر من أو تساوي قيمة دالة الهدف للمشكلة الرئيسية).

وقد استنتج (الشيخ وأخرون، يوليو 2022) في دراستهم التي نشرت في مجلة البحوث الأكاديمية (العلوم التطبيقية) ، بعض المعايير التي يمكن عن طريقها تقسيم المشكلتين الفرعيتين لبعض المسائل إلى مشكلة مرشحة للحل (يمكن أن تحتوي على الحل الأمثل الصحيح (*Int*) والأخرى غير مرشحة للحل ، وأنه عن طريق هذه المعايير يمكن التوقف عن الاستمرار في تفريع المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل ، بمعنى أنه عن طريق هذه المعايير يمكن الجزم في بعض المسائل أن المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل لا يمكن أن تحتوي على الحل الأمثل للمشكلة الرئيسية وبهذا يمكن تقليص سلسلة التفريعات بصفة عامة . إلا أنه لا يمكن استخدام هذه المعايير في كافة المسائل الأخرى، وتبحث هذه الورقة في تصميم معايير أخرى يمكن عن طريقها معرفة ما مدى إمكانية التوقف عن تفريع المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل ، في المسائل التي عجزت عنها الورقة المذكورة أعلاه ، وذلك بهدف تقليص عدد التفريعات في هذه الطريقة (B&B) لتوفير الوقت والجهد.

مجلة الدراسات الاقتصادية –كلية الاقتصاد – جامعة سرت المجلد السابع – العدد الثاني
Economic Studies Journal (ESJ), Faculty of Economics, Sirte University (Vol 7 , No 2)
https://doi.org/10.37375/esj.v7i2.2951
Oct 2024

2. طريقة التفريع والتحديد (B&B)

فقد ذكر (Gade et al, 1971) بإن خوارزمية قطع المستوى جوموري (Gomery cutting plane algorithm) تُعتبر من أقدم الطرق المستخدم في حل برامج الأعداد الصحيحة التي ظهرت سنة (1958)، وقد طبقت هذه الطريقة (B&B) لأول مرة في سنة 1960 من طرف الباحثين (Land, Doig, 1960)، وذلك لإيجاد الحل الأمثل بالأعداد الصحيحة (Int) لمشاكل البرمجة الخطية، التي تُعد من الاساليب التكرارية (Iterative Method) للوصول إلى الحل (*Int*) عبر خطوات محددة ومتكررة انطلاقاً من الحل الأمثل غير الصحيح (*Non-int*). قبل الخوض في آلية عمل هذه الطريقة بهدف الوصول إلى أهداف البحث، سيتم عرض النموذج الرياضي لهذه المشكلة، ومن ثم تقديم مراجعة سريعة للدراسات السابقة لها.

أ. النموذج الرياضي لبرمجة العدد الصحيح :

تهدف هذه طريقة (B&B) للبحث عن الحل الأمثل الصحيح (*Int*) انطلاقا من الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بالأعداد غير الصحيحة (Linear Programming Relaxations)، وذلك بتجزئة المشكلة إلى مشكلتين فرعيتين، وذلك لاستبعاد الحل الحالي (*Non-int*) من منطقة الحلول المكنة، وبذلك يكون النموذج الرياضي لبرمجة الأعداد الصحيحة هو نفس النموذج الرياضي للبرمجة الخطية (LPI)، بعد إضافة شرط أن تكون قيم المتغيرات القرارية قيم صحيحة (Int) كالتالي:

$$Max\ or\ Min\ (z) = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \qquad (1)$$

Subject to:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j (\leq, =, \ \geq) b_i \ \ for\ \ i = 1,2, \dots, m \qquad (2)$$

$$x_j \ \geq 0, \quad \forall j = 1,2, \dots \dots, n \qquad (3)$$

$$x_j\ integer, \qquad j = 1,2, \dots \dots, p \quad (p \leq n)$$

حيث أن:

z : قيمة دالة الهدف التي تقيس فعالية أو كفاءة قرار الاختيار.

x_j: المتغيرات التي يراد معرفة قيمتها.

c_j: تكلفة (أو عائد) الوحدة الواحدة من المتغيرات.

b_i: المتاح من الموارد أو التي تعكس شروط التشغيل.

m : عدد القيود أو الشروط في المشكلة (النموذج الرياضي).

n : عدد المتغيرات القرارية في المشكلة (النموذج الرياضي).

ب. الدراسات السابقة (Literature Review):

تُعتبر طريقة التفريع والتحديد (Branch and Bound) تقنية رياضية قوية تستخدم لحل مسائل التحسين الصعبة، لا سيما في البرمجة الخطية وغير الخطية والمشاكل التوافقية، تركز الأبحاث الحديثة على تحسين هذه التقنية من خلال تقليص زمن الحل باستخدام استراتيجيات متعددة.

هدفت دراسة (Linderoth & Savelsbergh, 1999) إلى فحص العديد من النتائج المتعلقة باستراتيجيات التفريع و التحديد وتقييمها مرة أخرى في ضوء التطورات الأخرى التي حدثت على مر السنين ، حيث اقترح أسلوب هجين يجمع بين اسلوب الهجين القوي (Hybrid Strong) وأسلوب التكلفة الزائفة (Pseudo cost) وسمي هذا المزيج بالتفرع الهجين (Hybrid Strong & Pseudo cost Branching) ، حيث كانت الفكرة الكامنة وراء هذه الطريقة هو اختيار المتغير الذي له تأثير أكبر متغيرات المشكلة وعادةً ما تعطي هذه الطريقة نتائج جيدة

كما أقترح (Ortega & Wolsey, 2003) قاعدة لتحديد المتغير المستخدم في عملية التفريع، تسمى (Opposite branching Rule) ، والتي يتم فيها اختيار المتغير الذي يكون جزئه الكسري هو الأبعد عن (0.5). وفي هذا الجانب أيضاً درس (Achterberg et al, 2005) هذه الخوارزمية من حيث تحديد المتغير المستخدم في التفريع، وذكر بأنه توجد قاعدة بسيطة وشائعة الاستخدام تسمى (Most Fractional or Most Infeasible) ، وهي اختيار المتغير الذي

مجلة الدراسات الاقتصادية –كلية الاقتصاد –جامعة سرت المجلد السابع – العدد الثاني
Economic Studies Journal (ESJ), Faculty of Economics, Sirte University (Vol 7 , No 2)
https://doi.org/10.37375/esj.v7i2.2951
Oct 2024

يكون جزئه الكسري الأقرب إلى النصف (0.5)، وأكدت الدراسة بإنه لا يمكن الجزم بأن استخدام هذه القاعدة أفضل من عملية اختيار المتغير عشوائياً من حيث عدد المشاكل المتولدة من عملية التفريع. وقد طور (Fischetti & Monaci, 2011) في دراستهما طريقة تفريع حديثة تسمى التفرع الخلفي (Backdoor Branching)، وهي تعمل على تحديد عدد بسيط من المتغيرات التي يجب استخدامها قي عملية التفريع قبل غيرها، وما يميز هذه التقنية هو أن شجرة التفريعات تكون صغيرة نسبياً .

في دراسة (Fischetti et al, 2017) قاموا بتحسين تقنية التفريع والتحديد باستخدام تقنيات البرمجة الخطية المختلطة (MILP)، حيث أظهر الباحثون أن استخدام تقنيات تسريع مثل القطع المستوي (plane cuts) وتحسين حدود العقد يمكن أن يقلل بشكل كبير من زمن الحل، مما يعزز فعالية هذه الطريقة في حل مشاكل البرمجة الخطية المعقدة.

أجرى (Achterberg et al, 2018) دراسة مكثفة حول تحسين تقنيات التفريع والتحديد من خلال دمج خوارزميات التعلم الآلي لتقدير حدود العقد بشكل أكثر دقة. أوضحت الدراسة أن هذه الاستراتيجيات يمكن أن تساهم في تقليص زمن الحل بنسبة تصل إلى 50% .

ركزت دراسة (Koch et al, 2019) على تطبيقات هذه الطريقة في مشاكل البرمجة الخطية الصحيحة الكاملة (Integer Linear Programming)، استخدمت الدراسة تقنيات تحسين الاستكشاف التكيفي للشجرة وتقليص حجم الشجرة (عدد المشاكل الفرعية) باستخدام حدود ديناميكية، وأظهرت النتائج أ أن هذه الاستراتيجيات تساهم بشكل كبير في تقليص زمن الحل وتحسين كفاءة هذه الخوارزمية.

أقترح (Munapo, 2020) طريقة لتحسين كفاءة خوارزمية التفريع و التحديد لحل مشكلة الأعداد الصحيحة للبرمجة الخطية ، حيث قدم نهجًا جديدًا لتقليل التعقيدات في هذه الخوارزمية(knapsack linear Int)، وقد توصل الى أنه إذا كان الحل الأمثل للبرمجة الخطية (LP) عددًا صحيحًا، فسيكون الحل الأمثل لمشكلة العدد الصحيح متاحًا، وإذا لم يكن كذلك فيتم تحديد متغير ذو قيمة كسرية لإنشاء مشكلتين فرعيتين، بحيث يتم تجاهل هذا الجزء من المنطقة الممكنة (Feasible Region)، ويتم تتكرر هذه العملية على جميع المتغيرات ذات القيم الكسرية حتى يتم إيجاد الحل الصحيح، وفي هذه الطريقة يتم إنشاء مجموع متغير وقيود إضافية وإضافتها إلى المشكلة الأصلية قبل البدء في حلها أصلاً.

قدم (Lodi et al, 2021) مراجعة حديثة لتقنيات تحسين التفريع والتحديد باستخدام البرمجة الخطية الصحيحة والمختلطة، أظهرت الدراسة أن تحسين حدود العقد واستخدام تقنيات الاستدلال (Inference Techniques) يمكن أن تسهم بشكل كبير في تقليص زمن الحل.

أقترح (Berthold, 2021) تطبيقات التفريع والتحديد في تحسين حل مسائل البرمجة التوافقية ، حيث تم التركيز على استخدام تقنيات التعلم الآلي لتحسين تقدير حدود العقد وتقليل زمن الحل. الدراسة أظهرت أن هذه الاستراتيجيات تساهم في تحسين كفاءة الحل وتخفيض الوقت المستغرق في الحل بشكل فعال.

في دراسة حديثة ، قام (الشيخ وآخرون، يونيو 2022)، آلية عمل هذه الطريقة وتأثير اختيار المتغير (ذو الكسر الأكبر أو الأصغر) المستخدم كأساس في عملية التفريع على عدد المشاكل الفرعية المتولدة من عملية التفريع، وتبين أنه ليس من الضرورة أن تتساوى عدد المشاكل الفرعية عند الاختلاف في استخدام المتغير المستخدم في عملية التفريعات، وأنه لا توجد قاعدة ثابتة لتحديد المتغير المناسب لذلك.

أكدت الدراسات الحديثة على أهمية استخدام تقنيات متقدمة في تحسين طريقة التفريع والتحديد لتقليص زمن الحل. من خلال دمج خوارزميات التعلم الآلي وتقنيات تقليل حجم الشجرة وتحسين حدود العقد، يمكن تحسين كفاءة وفعالية الحلول بشكل كبير. الأبحاث المستمرة في هذا المجال تساهم في تطوير تقنيات أكثر تقدمًا لحل مشاكل التحسين الكبيرة والمعقدة.

3. أهداف الدراسة

تهدف هذه الورقة لدراسة المعايير التي حددها الشيخ وأخرون (يوليو 2022) عند تحليلهم لآلية عمل طريقة (B&B)، بهدف تصميم معيار جديد يساعد على تقليص عملية تفريع المشاكل الفرعية (فروع شجرة الحلول) التي حلولها لا يمكن أن تتضمن الحل (*Int*) للمشكلة الرئيسية، بمعنى التوقف على تفريع المشاكل الفرعية (المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل) في بعض الحالات التي عجزت فيها ورقة الشيخ وأخرون (يوليو 2022) عن التوقف عن تفريعها ، والذي يعني تخفيض عدد المشاكل الفرعية (Iterations) في شجرة التفريعات، وهذا سيوفر الوقت والجهد اللازمين للوصول إلى الحل الأمثل (*Int*) للمشكلة الرئيسية ، ذلك بالاعتماد على نظرية فيثاغورس (Fethgors) في تقدير مقدار الانخفاض الذي يمكن أن يحدث في الحل (*Non-int*) للمشكلة الفرعية غير المرشحة، مع تقديم التحليلات المنطقية الخاصة بذلك مدعمة بالأدلة والتحليل البياني.

4. أهمية الدراسة:

في ظل الندرة النسبية للمراجع العربية الخاصة بطريقة (B&B) ، تناولت هذه الدراسة طريقة (B&B) بالشكل الذي يبرز أهمية هذه الورقة في توفر معلومات قيمة عن هذه المشكلة وآلية عمل هذه الطريقة ؛ وتبرز أهمية هذه الورقة من جانب أخر ، لإن المشاكل الفرعية المتولدة في طريقة (B&B) تزداد بزيادة أسية مع زيادة عدد المتغيرات وعدد القيود الخاصة بالمشكلة، وبالتالي فإن تصميم معيار جديد يقلص من عدد المشاكل الفرعية والذي يعني تخفيض دورات الحل (Iterations) ، وهذا طبعاً سيوفر الجهد والوقت في حل المشاكل المعقد في برمجة العدد الصحيح .

5. مشكلة الدراسة:

إن هذه الدراسة مبنية على الورقة البحثية الخاصة بـ (الشـيخ وأخرون، يوليو 2022) والتي بعنوان (دراسة تحليلية للبحث في شجرة التفريعات في طريقة التفريع والتحديد (B&B)، وتعتبر هذه الدراسة كعملية تطوير للورقة المذكورة ، ولكي نتمكن من توضيح مشكلة الدراسة ، نجد ضرورة لعرض سريع للورقة المذكورة أعلاه.

حيث أهتمت ورقة (الشيخ وأخرون، يوليو 2022) بدراسة طريقة التفريع والتحديد (B&B) والتي تعمل عن طريق تجزئة المشكلة الرئيسية إلى سلسلة من المشاكل الفرعية، وبما أن عدد المشاكل الفرعية الناتجة من عملية التفريع تزداد بشكل كبير بزيادة عدد متغيراتها وعدد قيودها. فقد أهتم مؤلفو تلك الورقة بدراسة سلسلة التفريعات والعوامل المؤثرة في نواتج الحل للمشاكل الفرعية ، وقد تمكن الباحثون من تحديد بعض المعايير (Criterions) التي يمكن من خلالها تحديد المشكلة الفرعية الواجب تفريعها (المشكلة المرشحة) والتي يمكن أن تحتوي على الحل الأمثل (*Int*) للمشكلة الرئيسية ، وبالتالي التوقف عن تفريع المشكلة الفرعية الأخرى (التي لا يمكن أن تحتوي على هذا الحل (*Int*))، وذلك بهدف تقليص عدد التفريعات لتوفير الوقت والجهد اللازم لحل المشكلة الرئيسية (تقليص عملية البحث في شجرة التفريعات). بمعنى أخر إن الباحثين في تلك الورقة تمكنوا من تحليل حركات نقاط الحل للمشكلة الفرعية وعلى أساس ذلك تم تحديد المعايير التي يمكن من خلالها تحديد المشكلة الفرعية الواجب تفريعها والتوقف عن الأخرى وهذه المعايير هي :

1) مقدار كسر المتغير المستخدم كأساس في عملية التفريع.
2) مقدار التغير بين المتغيرات (ميل الخط المستقيم (القيد) الواقعة عليه نقطة الحل للمشكلة الفرعية).
3) قيم معاملات المتغيرات القرارية بدالة الهدف.

وبناءً على هذه المعايير تمكن باحثوا تلك الورقة من تقسيم المشكلة الرئيسية المراد حلها إلى ثلاثة أنواع ، وذلك على أساس طبيعة حلول المشاكل الفرعية من حيث مدى احتوائها على حلول صحيحة (*Int*) قريبة من الحل الأمثل للمشكلة الرئيسية (*Non-int*) ، وبناءً على ذلك تم تقسيم هذه الأنواع وفقاً للحالات التالية:

1) عدم وجود حل (*Int*) في كلا المشكلتين الفرعيتين:

مجلة الدراسات الاقتصادية –كلية الاقتصاد – جامعة سرت المجلد السابع – العدد الثاني
Economic Studies Journal (ESJ), Faculty of Economics, Sirte University (Vol 7 , No 2)
https://doi.org/10.37375/esj.v7i2.2951
Oct 2024

بناءً على المعايير المستخدمة فأنه في هذه الحالة لا يوجد حل (*Int*) قريب في كلا المشكلتين الفرعيتين، وهذا يعني عدم إمكانية تحديد المشكلة المرشحة للحل وبالتالي يجب الاستمرار في عملية التفريع في كلا المشكلتين.

2) وجود حل (*Int*) في كلا المشكلتين الفرعيتين:

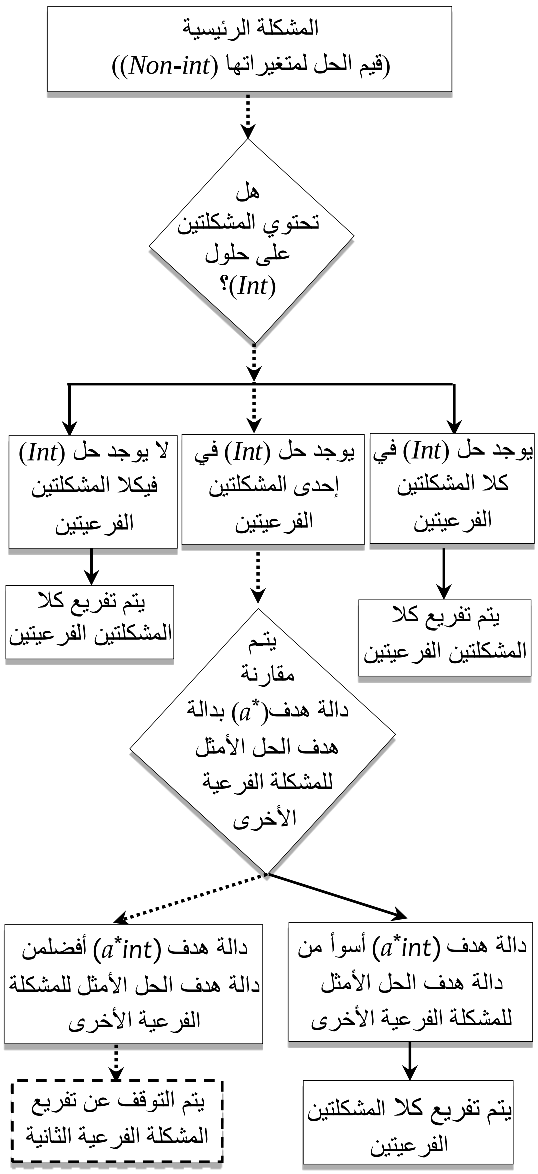
بناءً على المعايير المستخدمة فأنه في هذه الحالة يوجد حل (*Int*) قريب في كلا المشكلتين الفرعيتين، وهذا يعني أيضاً عدم إمكانية تحديد المشكلة المرشحة للحل وبالتالي يجب الاستمرار في عملية التفريع في كلا المشكلتين.

3) وجود حل (*Int*) بمشكلة فرعية وعدم وجوده في الأخرى

بناءً على المعايير المستخدمة فأنه في هذه الحالة يوجد حل (*Int*) قريب في مشكلة فرعية وعدم وجوده في المشكلة الفرعية الأخرى، وهذا يعني أنه يمكن تحديد المشكلة المرشحة للحل وهي المشكلة الفرعية المتضمنة للحل الـ (*Int*) . وفي هذا الحالة قام الباحثون بعمل اختبار يمكن على أساسه معرفة ما مدي إمكانية التوقف عن تفريع المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل، وذلك بمقارنة الحل (*Int*) الخاص بالمشكلة الفرعية المرشحة للحل مع أفضل حل (*Non-int*) للمشكلة الفرعية الأخرى (غير المرشحة للحل) ، فإذا كان الحل (*Int*) أفضل من الحل (*Non-int*) يتم التوقف عن تفريع المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل ، أما إذا كان أسوأ فإنه يجب الاستمرار في تفريع كلا المشكلتين الفرعيتين .

وبناءً على هذا التقسيم تمكن الباحثون من بناء نموذج لمشكلة التفريع الذي يوضح الحالات التي يجب الاستمرار فيها في عملية التفريع ، والحالة التي يجب فيها التوقف عن عملية التفريع والذي سيوفر الوقت والجهد في حل مثل هذا النوع من المشاكل ، وذلك كما هو موضح في الشكل (1)، الذي يوضح الحالات التي يجب الاستمرار في عملية تفريعها والحالة التي يجب فيها التوقف عن عملية التفريع في المشكلة غير المرشحة للحل ، فمن خلال تتبع الأسهم الممثلة بخطوط متقطعة في الشكل السابق يمكن معرفة الحالة التي يمكن التوقف فيها عن تفريع المشكلة غير المرشحة للحل.

إن مشكلة هذه الدراسة تنحصر في دراسة الحالة الأخيرة (وجود حل (*Int*) بمشكلة فرعية وعدم وجوده في الأخرى) ، وتحديدا عندما يكون الحل (*Int*) للمشكلة المرشحة للحل أسوأ من الحل (*Non-int*) للمشكلة الفرعية الأخرى (غير مرشحة للحل)، والتي ذكر فيها الباحثون (الشيخ وأخرون 2022) إنه يجب الاستمرار في تفريع المشكلتين.

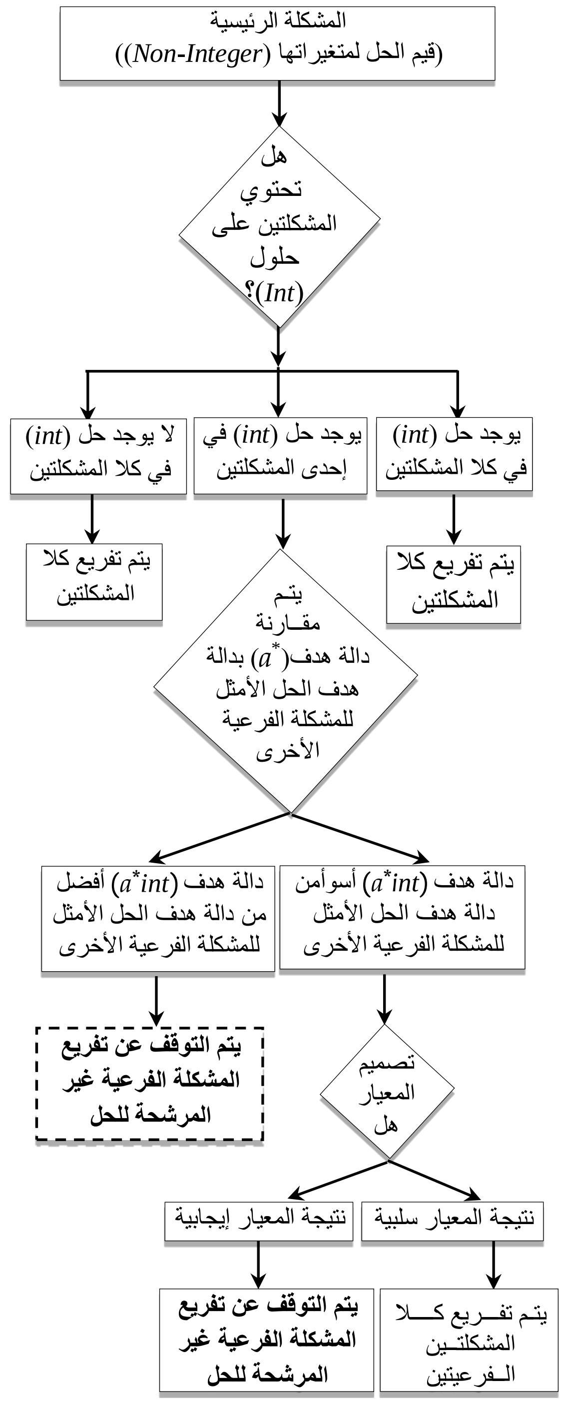


الشكل (1) الخطوات التي يجب القيام بها لمعرفة ما مدى إمكانية التوقف عن تفريع المشكلة غير المرشحة

إلا أنه نرى هنا أنه يمكن إجراء اختبار من نوع أخر على هذه الحالة ، وعلى هذا الأساس يمكن تقسيم هذه الحالة إلى حالتين أخريين ، في الأولى يمكن التوقف عن تفريع المشكلة غير المرشحة للحل وفي الثانية يتم

مجلة الدراسات الاقتصادية –كلية الاقتصاد –جامعة سرت المجلد السابع – العدد الثاني
Economic Studies Journal (ESJ), Faculty of Economics, Sirte University (Vol 7 , No 2)
https://doi.org/10.37375/esj.v7i2.2951
Oct 2024

الاستمرار في عملية التفريع في كلا المشكلتين الفرعيتين ، وبهذا فإنه في الحالة الأولى يمكن تقليص عدد التفريعات ، وبذلك سيكون شكل المخطط لحل هذه المشاكل كالتالي:



الشكل (2) الخطوات التي يجب القيام بها لمعرفة ما مدى إمكانية التوقف عن تفريع المشكلة غير المرشحة

6. تصميم معيار يحدد ما مدى إمكانية التوقف عن تفريع المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل

الجدير بالذكر هنا أنه قد أثبت (الشيخ وأخرون، يوليو 2022) إمكانية التوقف عن تفريع المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل في بعض المسائل ، وذلك عندما تكون قيمة دالة الهدف الصحيحة (*Int*) للمشكلة الفرعية المرشحة للحل أفضل أو تساوي الحل غير الصحيح (*Non-int*) في المشكلة الفرعية الأخرى ، أما أذا كان غير ذلك (الحل (*Int*) أسوأ من أفضل حل غير صحيح (*Non-int*) فإنه يجب الاستمرار في تفريع كلتا المشكلتين الفرعيتين . وفي هذه الورقة يرى الباحثين أنه يمكن إجراء اختبار (تصميم المعيار) يمكن استخدامه في الحالة الأخيرة (الحل (*Int*) أسوأ من أفضل حل غير صحيح (*Non-int*)) ، وعلى أساس هذا المعيار يمكن معرفة ما مدى إمكانية التوقف عن تفريع المشكلة الفرعية غير المرشحة ، بمعنى أنه يمكن استخدام هذا المعيار لتحديد إمكانية التوقف عن تفريع المشاكل الفرعية غير المرشحة التي عجز دراسة (الشيخ وأخرون، يوليو 2022) عن إيقاف عملية التفريع فيها.

كما سبق الذكر فإن هذه الدراسة تعتبر تطوير لدراسة (الشيخ وأخرون، يوليو 2022)، والفكرة الرئيسية الكامنة وراء هذه الدراسة هو تصميم معيار يمكن استخدامه في الحالة الثانية (عندما يكون الحل (*Non-int*) في المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل أفضل من الحل (*Int*) الخاص بالمشكلة الفرعية المرشحة للحل) .

ولمعرفة ما مدى التوقف عن تفريع المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل نتبع الخطوات التالية والتي توضح الفكرة الكامنة وراء تصميم هذا المعيار.

1) إيجاد الفرق بين قيمة دالة هدف العدد الصحيح (*Int*) للمشكلة الفرعية المرشحة للحل وافضل حل غير صحيح (*Non-int*) للمشكلة الفرعية غير المرشحة للحل .

2) التحرك على القيد الذي يحدد الحل (*Non-int*) في المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل بمقدار هذا الفارق (الذي تم تحديده في الخطوة (1))، ومن تم إيجاد احداثيات النقطة التي تحدد هذا الفارق ، وهذا يعني إن الحلول التي بعد هذه النقطة ستكون أسوأ من الحل (*Int*) الخاص بالمشكلة

مجلة الدراسات الاقتصادية –كلية الاقتصاد –جامعة سرت المجلد السابع – العدد الثاني
Economic Studies Journal (ESJ), Faculty of Economics, Sirte University (Vol 7 , No 2)
https://doi.org/10.37375/esj.v7i2.2951
Oct 2024

الفرعية المرشحة للحل ، أمام الحلول التي قبل احداثيات هذه النقطة ستكون مساوية أو أفضل من هذا الحل (*Int*) .

3) يتم حصر الحلول (*Int*) في المشكلة غير المرشحة للحل والتي تكون واقعة قبل احداثيات النقطة التي تم إيجادها في الخطوة (2) .

4) يتم مقارنة هذه الحلول (*Int*) التي تم إيجادها في الخطوة (3) بالحل (*Int*) الخاصة بالمشكلة الفرعية المرشحة للحل، فإذا كان :

أ) كل الحلول (*Int*) التي تم حصرها في الخطوة (3) أسوء من الحل (*Int*) الخاصة بالمشكلة الفرعية المرشحة للحل ، فهذا يعني يجب التوقف عن الاستمرار في تفريع المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل، لإنه بهذا نكون على يقين بإنه لا يوجد حل (*Int*) في المشكلة الفرعية غير مرشحة للحل أفضل من الحل (*Int*) الخاصة بالمشكلة الفرعية المرشحة للحل.

ب) أما إذا كان أحد الحلول التي تم حصرها أفضل من الحل (*Int*) الخاصة بالمشكلة الفرعية المرشحة للحل، فهذا يعني ضرورة الاستمرار في تفريع المشكلتين ، لإنه لا يوجد ضمان يؤكد أين يتمركز الحل الأمثل للمشكلة الرئيسية .

ولكي نتمكن من توضيح فكرة هذا المعيار سوف نعرض مثالين ، الأول يوضح الاختبار في حالة حدوث النقطة (أ) والتي تعني التوقف عن تفريع المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل، والثاني يوضح حالة وقوع النقطة (ب) وعندها ضرورة الاستمرار في تفريع المشكلتين الفرعيتين .

أولاً– في حالة التوقف عن الاستمرار في عملية تفريع المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل

نستخدم المثال الذي استخدمه (الشيخ وأخرون، يوليو 2022) ولم يتمكنوا من تحديد عملية التوقف أو الاستمرار في تفريع المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل وهو كالتالي:

$$Max\ Z = 5x_1 + 6x_2 \qquad (1)$$

$$ST:$$

$$4.2x_1 + 4.6x_2 \le 54 \qquad (2)$$

$$3x_1 + 5.2x_2 \le 45 \qquad (3)$$

$$x_1 ، x_2 \ge 0$$

وكما جاء في ورقة (الشيخ وأخرون، يوليو 2022) فإن الحل الأمثل للمشكلة الرئيسية (*Non-int*) هو:

$$(x_1 = 9.18 \quad ، \quad x_2 = 3.36 \quad ، \quad z = 66.06)$$

وبناءً على هذا الحل فقد قاموا بتفريع المشكلة باستخدام المتغير (x_1) ، وذلك بإضافة القيدين التاليين:

$$x_1 \le 9 \qquad (4)$$

$$x_1 \ge 10 \qquad (5)$$

وبهذا اصبحت نماذج المشاكل الفرعية كالتالي:

المشكلة الفرعية الأولى (المرشحة للحل):

$$Max\ Z = 5x_1 + 6x_2 \qquad (1)$$

$$ST:$$

$$4.2x_1 + 4.6x_2 \le 54 \qquad (2)$$

$$3x_1 + 5.2x_2 \le 45 \qquad (3)$$

$$x_1 \le 9 \qquad (4)$$

$$x_1 ، x_2 \ge 0$$

وقد أظهروا بأن حل (*Non-int*) هذه المشكلة الفرعية كما يلي:

$$(x_1 = 9 \ ، \ x_2 = 3.46 \quad ، \quad z = 65.76)$$

المشكلة الفرعية الثانية (غير مرشحة للحل):

$$Max\ Z = 5x_1 + 6x_2 \qquad (1)$$

$$ST:$$

$$4.2x_1 + 4.6x_2 \le 54 \qquad (2)$$

$$3x_1 + 5.2x_2 \le 45 \qquad (3)$$

$$x_1 \ge 10 \qquad (5)$$

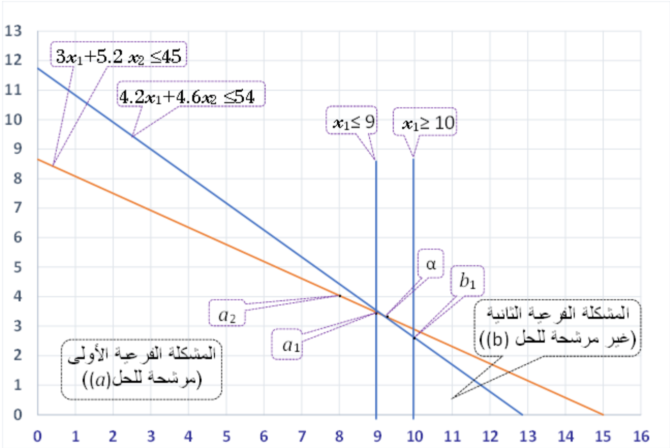
$$x_1 ، x_2 \ge 0$$

وقد أظهروا بأن حل (*Non-int*) هذه المشكلة الفرعية هذه كما يلي:

$$(x_1 = 10 \quad ، \quad x_2 = 2.61 \ ، \quad z = 65.66)$$

https://doi.org/10.37375/esj.v7i2.2951
Oct 2024
شهر أكتوبر 2024

وقد أظهروا هذه التمثيل البياني لهاتين المشكلتين كما في الشكل البياني التالي:



نقطة حل المشكلة الرئيسية (Non-Int)			
النقطة	احداثياته	Z	ملاحظات
α	(9.18 , 3.36)	66.06	حل Non-int

نقا المشكلة الفرعية المرشحة للحل (a)			
النقطة	احداثياتها	Z	ملاحظات
a_1	(9 , 3.46)	65.4	حل المشكلة (Non-int)
a_2	(8 , 4)	64	الحل (Int) المرشح للحل

نقا المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل (b)			
النقطة	احداثياتها	Z	ملاحظات
b_1	(10 , 2.61)	65.66	حل المشكلة (Non-int)

الشكل (3) حل المشكلة الرئيسية وحل المشكلتين الفرعيتين ونقطة الحل (Int) المرشحة للحل، (الشيخ وآخرون، يوليو2022)

بناءً على دراسة (الشيخ وأخرون، يوليو2022) فإنه في هذه المشكلة لا يمكن التوقف عن تفريع المشكلة الفرعية غير المرشحة ، لإن قيمة دالة الهدف للحل (Non-int) للمشكلة الفرعية غير المرشحة للحل (b_1) والتي قيمتها ($Zb_1 = 65.66$) أفضل من دالة الهدف المرشح للحل (Int) بالمشكلة الفرعية المرشحة للحل (a_2) حيث قيمة دالة هدفها ($Za_2 = 64$).

($Zb_1 > Za_2$)

($65.66 > 64$)

والآن سنتبع الخطوات الخاصة بتصميم المعيار الخاص بهذه الدراسة لمعرفة ما مدى إمكانية تفريع هذه المشكلة وذلك كما يلي:

1) إيجاد الفرق (β) بين قيمة دالة الهدف الصحيح (int) المرشح للحل بالمشكلة الفرعية المرشحة للحل (Za_2) ودالة الهدف (Non-int) لحل المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل (Zb_1)، والتي تساوي:

$\beta = Zb_1 - Za_2$

$\beta = 65.66 - 64 = 1.66$

2) التحرك على القيد الذي يحدد هذا الحل (Non-int) في المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل بمقدار هذا الفارق (الذي تم في الخطوة (1)) ، ومن تم إيجاد احداثيات النقطة التي يحددها هذا الفارق .

إن القيد الذي يحدد الحلول في المشكلة الفرعية غير المرشحة هو القيد الثاني:

$$3x_1 + 5.2x_2 \le 45 \qquad (3)$$

ولإيجاد المسافة الذي يجب أن نتحرك بها والتي تعادل (1.66 دينار) ، نستخدم النسبة والتناسب في ميل الخط المستقيم (m) وهو ميل القيد الممثل بالمتباينة (3) وذلك كما يلي:

$$m = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$$

$$m = \frac{11.739}{-12.857} = \frac{-0.913}{1}$$

وهذا يعني الانخفاض بمقدار (0.913−) في المتغير x_2 سيؤدي إلى زيادة في المتغير x_1 بمقدار وحدة واحدة (1) .

وعن طريق نظرية فيتاغورس يمكن إيجاد الوتر (مقدار الانخفاض على القيد الذي يحدد الحلول الممكنة للمشكلة الفرعية غير المرشحة في الحل) ، وذلك كما يلي:

$$c = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$$

$$c = \sqrt{(1)^2 + (-0.913)^2} = 1.354$$

والجدير بالذكر هنا هو أن الزيادة في المتغير x_1 بمقدار واحد صحيح والذي معامله في دالة الهدف (5) هذا سيؤدي إلى

مجلة الدراسات الاقتصادية –كلية الاقتصاد –جامعة سرت المجلد السابع – العدد الثاني
Economic Studies Journal (ESJ), Faculty of Economics, Sirte University (Vol 7 , No 2)
https://doi.org/10.37375/esj.v7i2.2951
Oct 2024

الزيادة في دالة الهدف بمقدار (5=5×1) ، كما أن الانخفاض في المتغير x_2 بمقدار (0.913−) والذي معامله في دالة الهدف (6) سيؤدي إلى الانخفاض في دالة الهدف بمقدار $(-0.913\times6 = -5.478)$ ، وهذا يعني أن الانخفاض بمقدار (1.354) على القيد المحدد لمنطقة الحلول الممكنة للمشكلة الفرعية غير المرشحة للحل سيؤدي إلى الانخفاض في قيمة دالة الهدف بمقدار $(5 - 5.478 = -0.478)$

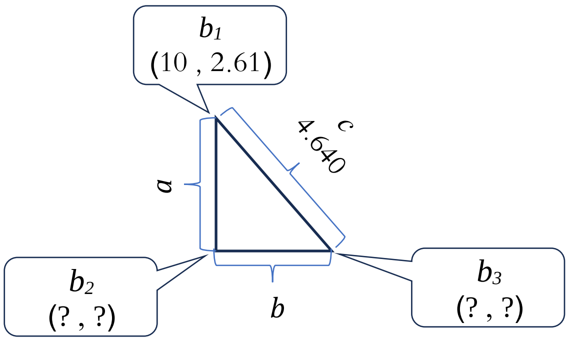
وبما أن الانخفاض (التحرك) على القيد المحدد لمنطقة الحلول الممكنة للمشكلة الفرعية غير المرشحة بمقدار (1.354) سيؤدي إلى انخفاض في قيمة دالة الهدف بمقدار (0.478−) ، فإنه يمكن معرفة مقدار التحرك (c) على هذا القيد الذي يؤدي إلى انخفاض دالة الهدف بمقدار (β) والتي ($\beta = 1.66$)، وذلك عن طريق النسبة والتناسب كما يلي:

$$\frac{1.354}{-0.478} = \frac{c}{-1.652}$$

$$c = \frac{1.354 \times -1.652}{-0.478} = 4.680$$

وهذا يعني أن كل الحلول الواقعة على مقدار هذا الانخفاض مساوية أو أكبر من قيمة الحل (*Int*) ، وهذا يعني أنه في حدود هذه المسافة يمكن أن يكون هنالك حل (*Int*) في المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل أفضل من الحل (*Int*) في المشكلة الفرعية المرشحة للحل، وهذا يعني ضرورة الاستمرار في تفريع المشكلتين الفرعيتين ، وإذا كان غير ذلك فإنه يمكن التوقف عن تفريع المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل، ولمعرفة ذلك نقوم أولاً بإيجاد احداثيات النقطة التي ينتهي عندها مقدار الانخفاض بـ (4.680) وذلك كما يلي:

إن المسافة (4.680) تمثل وتر مثلث قائم الزاوية ميله يساوي (0.913−) وأحداثي أحد رؤوسه هو إحداثيات نقطة الحل (*Non-int*) الخاصة بالمشكلة الفرعية غير المرشحة للحل (10 , 2.61) وذلك كما يظهر في الشكل التالي :



الشكل (4) يوضح البيانات المتاحة لمنطقة الحلول الممكنة للمشكلة الفرعية غير المرشحة والمعلومات المطلوب إيجادها

ويمكن إيجاد احداثيات نقاط المثلث (b_2, b_3) وذلك بإيجاد القطعة المستقيمة (a) والقطعة المستقيمة (b) بمعلومية الميل (m) وطول الوتر ($c = 4.640$) وذلك كما يلي :

$$a = \frac{mc}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$a = \frac{-0.913 \ \times 4.640}{\sqrt{-0.913^2+1}}$$

$$a = \frac{-4.271}{\sqrt{1.834}}$$

$$a = -3.154$$

$$b = \frac{c}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$b = \frac{4.640}{\sqrt{-0.913+1}}$$

$$b = \frac{4.640}{\sqrt{1.834}}$$

$$b = 3.455$$

وبهذا يمكن حساب إحداثيات النفطة (b_2) كما يلي:

∵ إحداثيات النقطة (b_1) هي (10 , 2.61)

مجلة الدراسات الاقتصادية –كلية الاقتصاد – جامعة سرت   المجلد السابع – العدد الثاني
Economic Studies Journal (ESJ), Faculty of Economics, Sirte University (Vol 7 , No 2)
https://doi.org/10.37375/esj.v7i2.2951
Oct 2024

∴ إحداثيات النقطة (b_2) تساوي

$$(10\ ,\ 2.61 - a)$$

$$(10\ ,\ 2.61 - 3.154)$$

∴ إحداثيات النقطة (b_2) تساوي $(10\ ,\ -0.545)$

وبذلك تكون إحداثيات النقطة (b_3) كما يلي:

$$(10 + b\ ,\ -0.545)$$

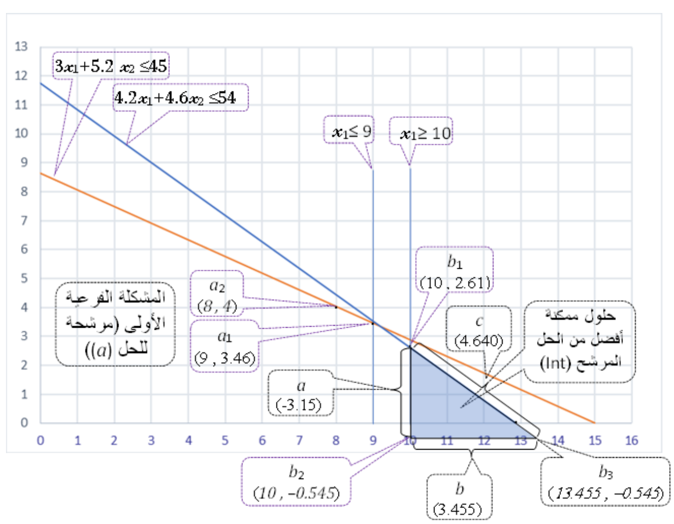
$$(10 + 3.455\ ,\ -0.545)$$

∴ إحداثيات النقطة (b_3) **تساوي** $(13.455\ ,\ -0.545)$

ملاحظة: يلاحظ أن قيمة الإحداثي (x_2) سالبة (-0.545) ، وهذا يعني إن المسافة (4.680) والتي تحركناها من نقطة حل المشكلة الفرعية غير المرشحة (b_1) ، والتي احداثياتها $(10\ ,\ 2.61)$ قد أوصلتنا إلى الربع الثاني على الإحداثي الكارتيزي والذي فيه تكون قيم (x_2) سالبة ، أي أن قيم إحداثيات المتغيرات تكون $(-\ ,\ +)$ ، ونظرا لشرط عد السلبية $(x_1\ ,\ x_2 \geq 0)$ فإن الحلول في هذا الربع غير مقبولة ، لذلك سنعتبر قيمة هذا المتغير صفر ، وبهذا ستكون :

إحداثيات النقطة (b_2) هي $(10\ ,\ 0)$.

وإحداثيات النقطة (b_3) هي $(13.455\ ,\ 0)$.



الشكل (5) يوضح منطقة الحلول الممكنة للمشكلة الفرعية غير المرشحة والتي هي أفضل من نقطة الحل (Int) المرشحة للحل

3) في هذه الخطوة يتم حصر الحلول (Int) في المشكلة غير المرشحة للحل والتي تكون واقعة داخل المثلث الذي تم تحديد إحداثيات رؤوسه في الخطوة (2) .

إن كافة النقاط الواقعة احداثياتها داخل إحداثيات هذا المثلث تكون مساوية أو أفضل من الحل (Int) الخاص بالمشكلة الفرعية المرشحة للحل، وفي هذه الخطوة سنقوم بتحديد النقاط (Int) الواقعة داخل هذا المثلث، ويمكن إيجاد هذه النقاط كما يلي:

جدول (1) يبين رؤوس مثلث المشكلة الفرعية غير المرشحة

رؤوس مثلث المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل			
النقطة	x_2	x_1	ملاحظات
b_1	2.61	10	-
b_2	−0.545	10	إحداثي (x_2) نجعله (0) بدلاً من (-0.545) لان القيم السالبة غير مقبولة
b_3	−0.545	13.455	إحداثي (x_2) نجعله (0) بدلاً من (-0.545) لان القيم السالبة غير مقبولة
Max	2.61	13.455	-
Min	0	10	-

∴ إحداثيات النقاط (Int) الواقعة ضمن إحداثيات رؤوس المثلث هذا المثلث موضحة في الجدول (2):

جدول (2) الحلول (Int) التي يتضمنها مثلث المشكلة غير المرشحة

النقطة	الإحداثيات	
	x_2	x_1
1	0	10
2	1	10
3	2	10
4	0	11
5	1	11
6	0	12

مجلة الدراسات الاقتصادية –كلية الاقتصاد – جامعة سرت المجلد السابع – العدد الثاني
Economic Studies Journal (ESJ), Faculty of Economics, Sirte University (Vol 7 , No 2)
https://doi.org/10.37375/esj.v7i2.2951
Oct 2024

4) يتم مقارنة هذه الحلول (*Int*) التي تم إيجادها في الخطوة (3) بالحل (*Int*) الخاصة بالمشكلة الفرعية المرشحة للحل وذلك كما يلي :

جدول (3) قيم دالة الهدف للحلول (Int) التي يتضمنها مثلث المشكلة الفرعية غير المرشحة

النقطة	الإحداثيات		معاملات المتغيرات في دالة الهدف		قيمة دالة الهدف لهذه الحلول	أفضل حل (*Max*)
	x_2	x_1	p_2	p_1	Z	
1	0	10	6	5	50	
2	1	10	6	5	56	
3	**2**	**10**	**6**	**5**	**62**	**62**
4	0	11	6	5	55	
5	1	11	6	5	61	
6	0	12	6	5	60	

ملاحظات:

1) إن أفضل حل في هذه النقاط هو الحل الثالث (2 , 10) وتكون قيمته في دالة الهدف (62) وهو أسوأ من الحل المرشحة للحل في المشكلة الفرعية المرشحة للحل والذي احداثياته (4 , 8) وقيمة دالة الهدف فيه (64)، وهذا يعني إمكانية التوقف عن تفريع المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل لإنه لا يوجد فيها حل (*Int*) أفضل من هذا الحل.

2) تأسيساً على الأمانة العلمية فإن هذه الطريقة لا تكون فعالة دائماً فإذا تبث عكس الحلة السابقة (عكس ما جاء في الملاحظة السابقة (1)) ، أي أنه لا يمكن لاعتماد عليها دائماً في عملية التوقف عن تفريع المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل ، فإذا تبين إن أفضل حل (*Int*) موجود داخل نطاق رؤوس المثلث أفضل من الحل (*Int*) المرشح للحل ، فإنه يجب الاستمرار في تفريع كلتا المشكلتين الفرعيتين ، ولتوضيح ذلك نفرض المثال التالي:

ثانياً– في حالة الاستمرار في تفريع المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل

هنا سنقوم بإجراء بعض التعديلات على المثال السابق وبالشكل الذي يجعله لا يمكن استخدام المعيار في عملية التوقف عن الاستمرار في تفريع المشكلة ، وبالتالي ضرورة تفريع كلا المشكلتين الفرعيتين ، وهو كالتالي:

$$Max\ Z = 5x_1 + 6.9x_2 \quad (6)$$

ST:

$$4.2x_1 + 4.6x_2 \leq 56.5 \quad (7)$$

$$3x_1 + 5.2x_2 \leq 45.5 \quad (8)$$

$$x_1 ، x_2 \geq 0$$

إن الحل الأمثل للمشكلة الرئيسية (*Non-int*) لهذا النموذج هو:

$$(x_1 = 10.547 \ ،\ x_2 = 2.761 \ ،\ z = 71.789)$$

وبناءً على هذا الحل فإنه تفريع المشكلة باستخدام المتغير (x_1) ، وذلك بإضافة القيدين التاليين:

$$x_1 \leq 10 \quad (9)$$

$$x_1 \geq 11 \quad (10)$$

وبهذا اصبحت نماذج المشاكل الفرعية كالتالي:

المشكلة الفرعية الأولى (المرشحة للحل):

$$Max\ Z = 5x_1 + 6.9x_2 \quad (6)$$

ST:

$$4.2x_1 + 4.6x_2 \leq 56.5 \quad (7)$$

$$3x_1 + 5.2x_2 \leq 45.5 \quad (8)$$

$$x_1 \leq 10 \quad (9)$$

$$x_1 ، x_2 \geq 0$$

وقد أظهروا بأن حل (*Non-int*) هذه المشكلة الفرعية كما يلي:

$$(x_1 = 10 \ ،\ x_2 = 2.981 \ ،\ z = 70.567)$$

مجلة الدراسات الاقتصادية –كلية الاقتصاد – جامعة سرت المجلد السابع – العدد الثاني
Economic Studies Journal (ESJ), Faculty of Economics, Sirte University (Vol 7 , No 2)
https://doi.org/10.37375/esj.v7i2.2951
Oct 2024

المشكلة الفرعية الثانية (غير مرشحة للحل):

$$Max\ Z = 5x_1 + 6.9x_2 \quad (6)$$

$ST:$

$$4.2x_1 + 4.6x_2 \leq 56.5 \quad (7)$$

$$3x_1 + 5.2x_2 \leq 45.5 \quad (8)$$

$$x_1 \geq 11 \quad (10)$$

$$x_1 ، x_2 \geq 0$$

وقد أظهروا بأن حل (Non-int) هذه المشكلة الفرعية هذه كما يلي:

$$(x_1 = 11 \quad ، \quad x_2 = 2.239 \quad ، \quad z = 70.450)$$

والآن سوف نتتبع الخطوات الخاصة بتصميم المعيار لحل هذا النموذج وذلك كما يلي:

1) إيجاد الفرق (β) بين قيمة دالة الهدف الصحيح (int) المرشح للحل بالمشكلة الفرعية المرشحة للحل (Za_2) التي تساوي:

$\beta = Zb_1 - Za_2$

$\beta = 70.45 - 67.6 = 2.85$

2) التحرك على القيد الذي يحدد هذا الحل (Non-int) في المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل بمقدار هذا الفارق (2.85) ، والقيد الذي يحدد الحل الحلول في المشكلة الفرعية غير المرشحة هو :

$$3x_1 + 5.2x_2 \leq 45.5 \quad (8)$$

ويمكن إيجاد المسافة التي يجب أن ننخفض بها والتي تعادل (2.85 دينار) ، نستخدم النسبة والتناسب في ميل الخط المستقيم (m) وهو ميل القيد الممثل بالمتباينة (8) وذلك كما يلي:

$$m = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$$

$$m = \frac{12.283}{-13.452} = \frac{-0.913}{1}$$

وعن طريق نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد الوتر وذلك كما يلي:

$$c = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$$

$$c = \sqrt{(1)^2 + (-0.913)^2} = 1.354$$

إن الزيادة في المتغير x_1 بمقدار واحد صحيح والذي معامله في دالة الهدف رقم (5) هذا سيؤدي إلى الزيادة في قيمة المتغير (x_1) في دالة الهدف بمقدار (5= 5×1) ، كما أن الانخفاض في المتغير(x_2) بمقدار (0.913-) والذي معامله في دالة الهدف (6.9) هذا سيؤدي إلى الانخفاض في دالة الهدف بمقدار (6.30- = 6.9×0.913-) ، وهذا يعني أن الانخفاض بمقدار (1.354) على القيد المحدد لمنطقة الحلول الممكنة للمشكلة الفرعية غير المرشحة للحل سيؤدي إلى الانخفاض في قيمة دالة الهدف بمقدار (1.30- = 6.30 – 5)

وبما أن التحرك على القيد المحدد لمنطقة الحلول الممكنة للمشكلة الفرعية غير المرشحة بمقدار (1.354) سيؤدي إلى انخفاض في قيمة دالة الهدف بمقدار (1.30-) ، وبذلك فإنه يمكن إيجاد مقدار التحرك (c) بمقدار (β = 1.66) ، وذلك عن طريق النسبة والتناسب كما يلي:

$$\frac{1.354}{-1.3} = \frac{c}{-2.85}$$

$$c = \frac{1.354 \times -2.85}{-1.30} = 2.969$$

وهذا يعني أن كل الحلول الواقعة بمقدار هذا الانخفاض مساوية أو أكبر من قيمة الحل (Int) ، وفي حدود هذه المسافة يمكن أن يكون هنالك حل (Int) في المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل أفضل من الحل (Int) في المشكلة الفرعية المرشحة للحل، وهذا يعني ضرورة الاستمرار في تفريع المشكلتين الفرعيتين ، وإذا كان غير ذلك فإنه يمكن التوقف عن تفريع المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل، ولمعرفة ذلك نقوم أولاً بإيجاد احداثيات النقطة التي ينتهي عندها مقدار الانخفاض بـ (2.969) وذلك كما يلي :

مجلة الدراسات الاقتصادية –كلية الاقتصاد – جامعة سرت المجلد السابع – العدد الثاني
Economic Studies Journal (ESJ), Faculty of Economics, Sirte University (Vol 7 , No 2)
https://doi.org/10.37375/esj.v7i2.2951
Oct 2024

ويمكن إيجاد احداثيات نقاط المثلث (b_2, b_3) وذلك بإيجاد القطعة المستقيمة (a) والقطعة المستقيمة (b) بمعلومية الميل (m) وطول الوتر $(c = 2.969)$ وذلك كما يلي :

$$a = \frac{mc}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$$a = \frac{-0.913 \ \times 2.969}{\sqrt{-0.913^2 + 1}}$$

$$a = -2.002$$

$$b = \frac{c}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$$b = \frac{2.969}{\sqrt{-0.913 + 1}}$$

$$b = 2.192$$

وبهذا يمكن حساب إحداثيات النقطة (b_2) كما يلي:

∵ إحداثيات النقطة (b_1) هي $(11 , 2.239)$

∴ إحداثيات النقطة (b_2) تساوي

$(11 , 2.239 - a)$

$(11 , 2.239 -2.002)$

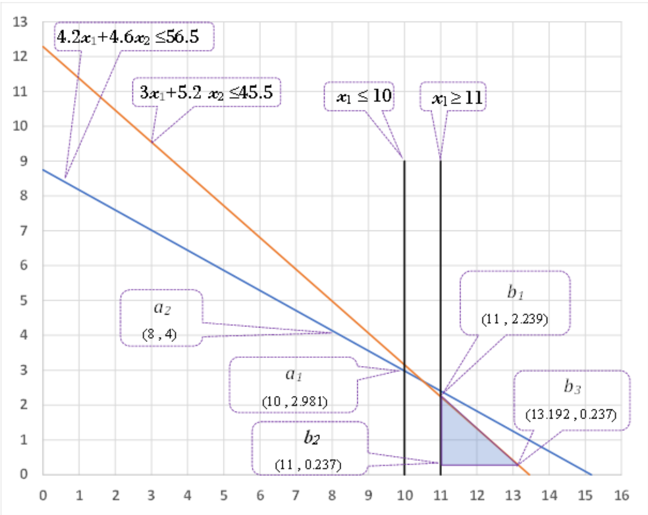
∴ إحداثيات النقطة (b_2) تساوي $(11 , 0.237)$

وبذلك تكون إحداثيات النقطة (b_3) كما يلي:

$(11 + b , 0.237)$

$(11 + 2.192 , 0.237)$

∴ إحداثيات النقطة (b_3) تساوي $(13.192 , 0.237)$



الشكل (6) منطقة الحلول الممكنة للمشكلة الفرعية غير المرشحة والتي هي أفضل من نقطة الحل (Int) المرشحة للحل

3) هنا يتم حصر الحلول (Int) في المشكلة غير المرشحة للحل والتي تكون واقعة داخل المثلث، وذلك كما يلي:

جدول (4) يبين رؤوس مثلث المشكلة الفرعية غير المرشحة

رؤوس مثلث المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل		
x_1	x_2	النقطة
11	2.239	b_1
11	0.237	b_2
13.192	0.237	b_3
13.192	2.239	Max
11	0.237	Min

∴ إحداثيات النقاط (Int) الواقعة ضمن إحداثيات رؤوس المثلث كما هي موضحة في الجدول (5):

جدول (5) يبين الحلول (Int) التي يتضمنها مثلث المشكلة الفرعية غير المرشحة

الإحداثيات		النقطة
x_1	x_2	
11	1	1
11	2	2
12	1	3

مجلة الدراسات الاقتصادية –كلية الاقتصاد –جامعة سرت المجلد السابع – العدد الثاني
Economic Studies Journal (ESJ), Faculty of Economics, Sirte University (Vol 7 , No 2)
https://doi.org/10.37375/esj.v7i2.2951
Oct 2024

4) يتم مقارنة الحلول (*Int*) التي تم إيجادها في الخطوة (3) بالحل (*Int*) الخاصة بالمشكلة المرشحة للحل وذلك كما يلي:

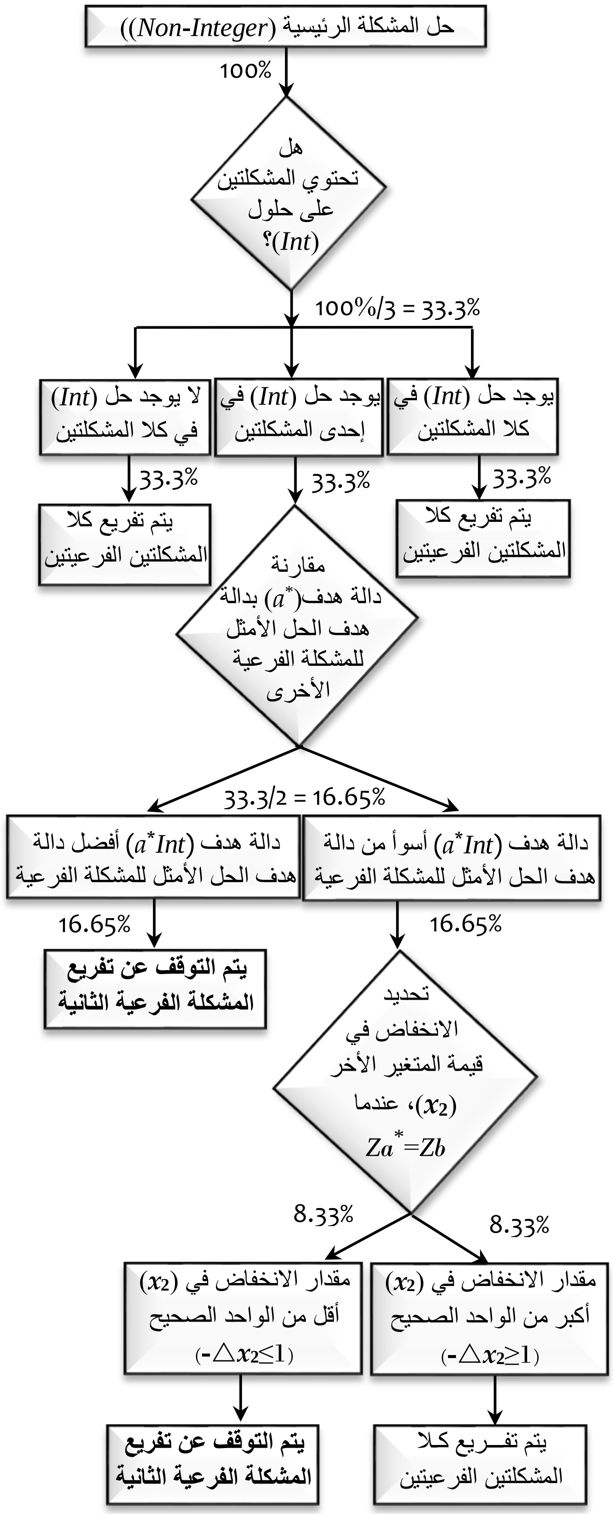
جدول (6) قيم دالة الهدف للحلول (*Int*) التي يتضمنها مثلث المشكلة الفرعية غير المرشحة

النقطة	الإحداثيات		معاملات المتغيرات في دالة الهدف		قيمة دالة الهدف لهذه الحلول	أفضل حل (Max)
	x_2	x_1	p_2	p_1	Z	
1	1	11	6.9	5	61.9	
2	**2**	**11**	6.9	5	**68.8**	**68.8**
3	1	12	6.9	**5**	66.9	

ملاحظة: إن أفضل حل في هذه النقاط هو الحل الثاني (2 , 11) وتكون قيمته في دالة الهدف هو (68.8) وهو أفضل من الحل (*Int*) المرشحة للحل في المشكلة الفرعية المرشحة للحل (a_2) والذي إحداثياته (4 , 8) وقيمة دالة هدفه (67.6)، وهذا يعني ضرورة الاستمرار في تفريع كلا المشكلتين الفرعيتين.

7. استنتاجات الدراسة:

مما سبق يمكن استنتاج شكل المخطط الذي يوضح الخطوات التي يجب القيام بها لتحديد إمكانية تفريع المشكلة المرشحة لإحتوائها الحل الأمثل (*Int*) ، أي أن هذا المخطط يوضح الحالات التي نتوقف فيها عن تفريع المشكلة (المشكلة غير المرشحة)، وذلك بهدف تقليل عدد المشاكل الفرعية والتي تؤدي إلى تخفيض العمليات الحسابية اللازمة لذلك ،ومن جهة أخرى يوضح الحالات التي يمكن فيها تفريع المشكلة الفرعية المرشحة فقط ، وهي الحالات التي موضحة في هذا المخطط بخط مغمق والتي تقدر في مجملها (25%) تقريباً عند افتراض تساوي احتمالات وقوع هذه الحالات ، وهذا يعني أن استخدام هذا المعيار سيؤدي إلى تخفيض عدد التفريعات بنسبة (25%) تقريباً، وهي (16.65%) ناتجة من عملية التوقف عن تفريع المشكلة الفرعية الثانية ، بالإضافة إلى (8.33%) ناتجة عن استخدام هذا المعيار وذلك عندما يكون مقدار الانخفاض في (x_2) أقل من الواحد الصحيح ($-\triangle x_2 \leq 1$)، كما هو موضح في الشكل التالي:



الشكل (7) يوضح النسب المئوية الخاصة بعملية التوقف والاستمرار في تفريع المشكلة

مجلة الدراسات الاقتصادية –كلية الاقتصاد – جامعة سرت المجلد السابع – العدد الثاني
Economic Studies Journal (ESJ), Faculty of Economics, Sirte University (Vol 7 , No 2)
https://doi.org/10.37375/esj.v7i2.2951
Oct 2024

8. الخلاصة Conclusion

اعتمدت هذه الدراسة على دراسة الشيخ وآخرون (يوليو2022) التي تناولت طريقة التفريع والتحديد (*Int*) والتي تعتبر من أهم الطرق المستخدمة في إيجاد الحل الأمثل (*Int*) انطلاقاً من الحل الأمثل (-*Non Int*)، وذلك عن طريق تفريع المشكلة الرئيسية إلى مشكلتين فرعيتين بناءً على أحد المتغيرات القرارية للمشكلة، ومن تم تفريع هذه المشاكل الفرعية إلى عدة مشاكل فرعية أخرى، وتستمر عملية التفريع هذه إلى حين عدم إمكانية القيام بذلك (ظهور حل (*Int*) للمشكلة الفرعية أو عدم وجود حل لها)، ويتم تحديد الحل الأمثل (*Int*) للمشكلة الرئيسية عن طريق المفاضلة بين الحلول (*Int*) لهذه المشاكل الفرعية لتقليص عدد المشاكل الفرعية التي يجب القيام بها للوصول إلى الحل الأمثل (*Int*) للمشكلة الرئيسية، وذلك عن طريق تحديد المشكلة الفرعية (المرشحة) التي تتضمن الحل الأمثل للمشكلة الرئيسة.

إن الفكرة الرئيسية الكامنة وراء انطلاق هذه الدراسة هي اعتمادها على تحديد المشكلة الفرعية المرشحة للحل بناءً على دراسة الشيخ وآخـــرون (يوليو2022) ، حيث تم في هذه الورقة تصميم معيار يتم استخدامه عندما تكون دالة الهدف للحل الصحيح (a^*Int) الخاص بالمشكلة المرشحة للحل أسوأ من دالة هدف الحل الأمثل للمشكلة الفرعية الأخرى، والذي من خلاله يمكن تخفيض عدد تفريعات المشكلة الرئيسية ، وفي نهاية هذه الدراسة تم وضع مخطط يوضح المعيار الذي تم استخدامه وتفاصيل التفريعات الخاصة بالمشكلة الرئيسية والنسبة المئوية لكل تفريع ، حيث بلغت نسبة التخفيض في عمليات التفريع إلى (25%) تقريباً من عدد المشاكل الفرعية للمشكلة الرئيسية عند استخدام طريقة التفريع والتحديد (B&B) المستخدمة في حل مشكلة برمجة العدد الصحيح (Intger Programming Problem).

المراجع العربية

1- الشيخ, عبد الله وآحرون. (يونيو 2022)."اختيار المتغير ذو الكسر الأكبر أو الأصغر كأساس للتفريع في طريقة التفريع والتحديد"، The International Journal of Engineering and Information Technology. June (2022) Vol (9) .

2- الشيخ, عبد الله وآحرون. (يوليو 2022)." دراسة تحليلية للبحث في شجرة التفريعات في طريقة التفريع والتحديد (B&B)(دراسة نظرية للمشاكل الخطية من نوع m×2")، مجلة البحوث الأكاديمية (العلوم التطبيقية). Vol (2022) (22)، 20-34.

المراجع الأجنبية .

1- Achterberg, T., Koch, T., & Martin, A. (2018). Branching on general disjunctions. Mathematical Programming, 188(1), 69-95.
2- A. H. Land and A. G. Doig.(1960). An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems. Econometrica, Vol. 28, No3.
3- Berthold, T. (2021). Learning-based branching in integer programming. Annals of Operations Research, 304(1), 17-47.
4- Dinakar Gade, Simge K¨u¸c¨ukyavuz, & Suvrajeet Sen,(2012). Integrated Systems Engineering 210 Baker Systems, 1971 Neil Avenue The Ohio State University, Columbus.OH.43210 {gade.6,kucukyavuz.2,sen.22}@osu.edu August 15, 2012.

5- Elias Munapo. (2020).Improvement of the Branch and Bound Algorithm for Solving the Knapsack Linear Integer Problem. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies2(4 (104)), 59-69.
6- F. Ortega, L.A. Wolsey. (2003). A branch-and-cut algorithm for the single-commodity, uncapacitated, fixed-charge network flow Problem. Networks, 143–158.
7- Fischetti, M., Salvagnin, D., & Zanette, A. (2017). Minimal branching rule for mixed-integer linear programming. European Journal of Operational Research, 263(3), 715-723.
8- J.T. Linderoth, M.W.P. Savelsbergh .(1999). A computational study of search strategies for mixed integer programming. INFORMS J. Comput11, 173.
9- Koch, T., Ralphs, T., Shinano, Y., &Vigerske, S. (2019). Solving hard mixed-integer programming problems with MIP solvers and supercomputers. OR Spectrum, 41(4), 865-898.
10- Lodi, A., Zarpellon, G., & Jo, J. (2021). Learning to Branch in Mixed-Integer Programming. Journal of Machine Learning Research, 22(1), 33-47.
11- M. Fischetti, M. Monaci, O. G¨unl¨uk, & G.J. Woeginger (Eds.). (2011). Integer Programming and Combinatoral Optimization, in: Lecture Notes in Computer Science, vol. 6655, Springer, Berlin, Heidelberg, 183-191.
12- T. Achterberg, T. Koch, & A. Martin. (2005). Branching rules revisited. Oper. Res. Lett. 33, 42-54.