جامعة التحدي
كلية العلوم/مصراته
قسم الرياضيات

حول تحديد الصيغ القانونية للمصفوفات

قدمت هذه الرسالة استكمالا لمتطلبات الإجازة العالية "الماجستير"
بتاريخ 25 / 7 / 1996م بقسم الرياضيات بكلية العلوم/ جامعة التحدي

مقدمة من

الياس محمد محمد المحيشي
بكالوريوس رياضيات

إشراف

د. مصطفى أحمد سلمان
أستاذ بقسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة التحدي

جامعة التحدي
كلية العلوم/مصراته
قسم الرياضيات

حول تحديد الصيغ القانونية للمصفوفات

مقدمة من

الياس محمد محمد المحيشي

بكالوريوس رياضيات

نوقشت الرسالة يوم الخميس 9 ربيع الأول 1406 و.ر الموافق 25 / 7 / 1996 افرنجي

			التوقيع
1.	د. راضي إبراهيم محمد علي	مقرر لجنة	....
2.	د. أحمد عبدالعالي هب الريح	عضواً	....
3.	د. مصطفى أحمد سلمان	مشرف وعضو	....

د. أحمد عبدالعالي هب الريح
أمين قسم الرياضيات
كلية العلوم / مصراته
....

د. غفار حسين موسى
مقرر لجنة الدراسات العليا
كلية العلوم / مصراته
....

أ. مفتاح عبدالله السيوي
أمين اللجنة الشعبية لكلية العلوم بمصراته
....

د. أبو القاسم مسعود بالشيخ
أمين اللجنة الشعبية لجامعة التحدي
....

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ وَقُلْ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ ﴾

صدق الله العظيم

الإهـــداء

إلى والدي العزيزين . . .

مع تمنياتي لهما بالصحة وطول العمر . . .

إلى أسرتي الكريمة . . .

إلى جميع الأصدقاء . . .

و إلى كل من تعاون معنا . . .

أهدي هذا العمل.

شكر وتقدير

في البداية أشكر المولى عز وجل الذي وفقني في إنجاز هذا العمل، كما أتقدم بجزيل الشكر والتقدير إلى استاذي الدكتور مصطفى أحمد سلمان على مابذله من مجهودات كبيرة في سبيل الوصول إلى هذه النتيجة، كما أشكر أمين قسم الرياضيات الدكتور أحمد عبدالعالي هب الريح، ومقرر لجنة الدراسات العليا الدكتور غفار حسين موسى على تشجيعهم ومساعدتهم، وكذلك أشكر كل من الدكتور عبدالحفيظ مصطفى والدكتور علي عبيد على مساعدتهم وتشجيعهم، كما أتقدم بكل الشكر والتقدير إلى أمين اللجنة الشعبية لكلية العلوم الأستاذ مفتاح عبدالله السيوي على مساعداته، وأخيراً لايفوتني أن أقدم الشكر لأمين اللجنة الشعبية بالمعهد العالي للمهن الشاملة بمصراته الأستاذ محمد عمر اسميو الذي منحني الوقت الكافي لاستكمال الدراسة.

إلياس محمد الحبشي

المحتويات

الموضوع	الصفحة
المقدمة	1
الفصــل الأول	
1.1 مفاهيم أساسية	4
1.2 التحويلات الخطية	5
1.3 القيم والمتجهات الذاتية	10
1.4 الموديولات	11
1.5 التحويل إلى الصورة القطرية	13
الفصل الثاني	
التحويل لصيغة جوردان القانونية	
2.1 تحديد شكل مصفوفة جوردان القانونية	23
2.2 تحديد مصفوفة الإنتقال لمصفوفة جوردان القانونية	31
2.3 خوارزمية التحويل لصيغة جوردان القانونية	48
الفصل الثالث	
التحويل للصيغة القياسية (النسبية) القانونية	
3.1 تحديد مصفوفة العوامل غير المتغيرة	57
3.2 تحديد مصفوفة الإنتقال للصيغة القياسية القانونية	61
3.3 خوارزمية التحويل للصيغة القياسية القانونية	70
ملخص الرسالة باللغة الإنجليزية	78
المراجع	79
معجم المصطلحات العلمية	80

المقدمة

الصيغ القانونية للمصفوفات لها أهمية كبيرة ليس في الجبر الخطي فحسب، وإنما في الكثير من المجالات العلمية الأخرى، فإضافة إلى أن الصورة القانونية لمصفوفة تعطي معلومات واسعة حول فضاء المتجهات الذي تعمل عليه فإنها أيضاً تستخدم في برهنة الكثير من الحقائق العلمية التي نحتاج فيها إلى تحويل المصفوفة إلى صورتها القانونية. والبحوث والدراسات والتطبيقات في هذا المجال واسعة جداً، نذكر منها على سبيل المثال لا الحصر ماقام به J. Heading [7] في الفيزياء من دراسة الكثافة والطاقة من خلال التعامل مع مصفوفة معرفة على الأعداد الحقيقية ذات جذور ذاتية $\pm q$ وتحويلها إلى صيغة جوردان القانونية، كذلك فإن F. Uhlig [11] قام بدراسة القطر لزوج من المصفوفات المتناظرة والقابلة للعكس أما إمكانية تحويل أي مصفوفة مربعة معرفة على حقل الاعداد الحقيقية إلى صورتها القانونية (قطرية، جوردان أو قياسية) فقد نالت الكثير من اهتمامات الباحثين نذكر منهم Antone [3] الذي أعطى تصوراً واضحاً لإمكانية إيجاد مصفوفة قطرية مشابهة لمصفوفة معطاة، كما أعطى خوارزمية لكيفية إيجاد هذه المصفوفة كذلك فإن إمكانية إيجاد مصفوفة قانونية (جوردان أو قياسية) لمصفوفة معطاة قد وردت في الكثير من البحوث والدراسات المنشورة ولكن لم ترد طريقة صريحة أو خوارزمية لكيفية إيجاد مصفوفة الانتقال من المصفوفة المعطاة إلى المصفوفة القانونية.

درسنا في هذه الرسالة إمكانية إيجاد مصفوفة ذات صيغة قانونية (قطرية، جوردان أو قياسية) مشابهة لمصفوفة معطاة وكيفية إيجاد مصفوفة الانتقال إلى هذه الصيغ القانونية.

تمخضت الدراسة عن مخطط لبيان إمكانية إيجاد مصفوفة بصيغة قانونية (قطرية، جوردان أو قياسية) مشابهة لمصفوفة معطاة وخوارزميات لإيجاد مصفوفة الانتقال من المصفوفة المعطاة إلى المصفوفة ذات الصيغة القانونية.

وتضمنت هذه الرسالة ثلاثة فصول، حيث درسنا في الفصل الأول إمكانية وكيفية تحويل المصفوفة المربعة A من الرتبة n إلى الصورة القطرية، وكذلك احتوى هذا الفصل على بعض التعاريف والمبرهنات الأساسية التي احتجنا إليها في الفصلين الثاني والثالث.

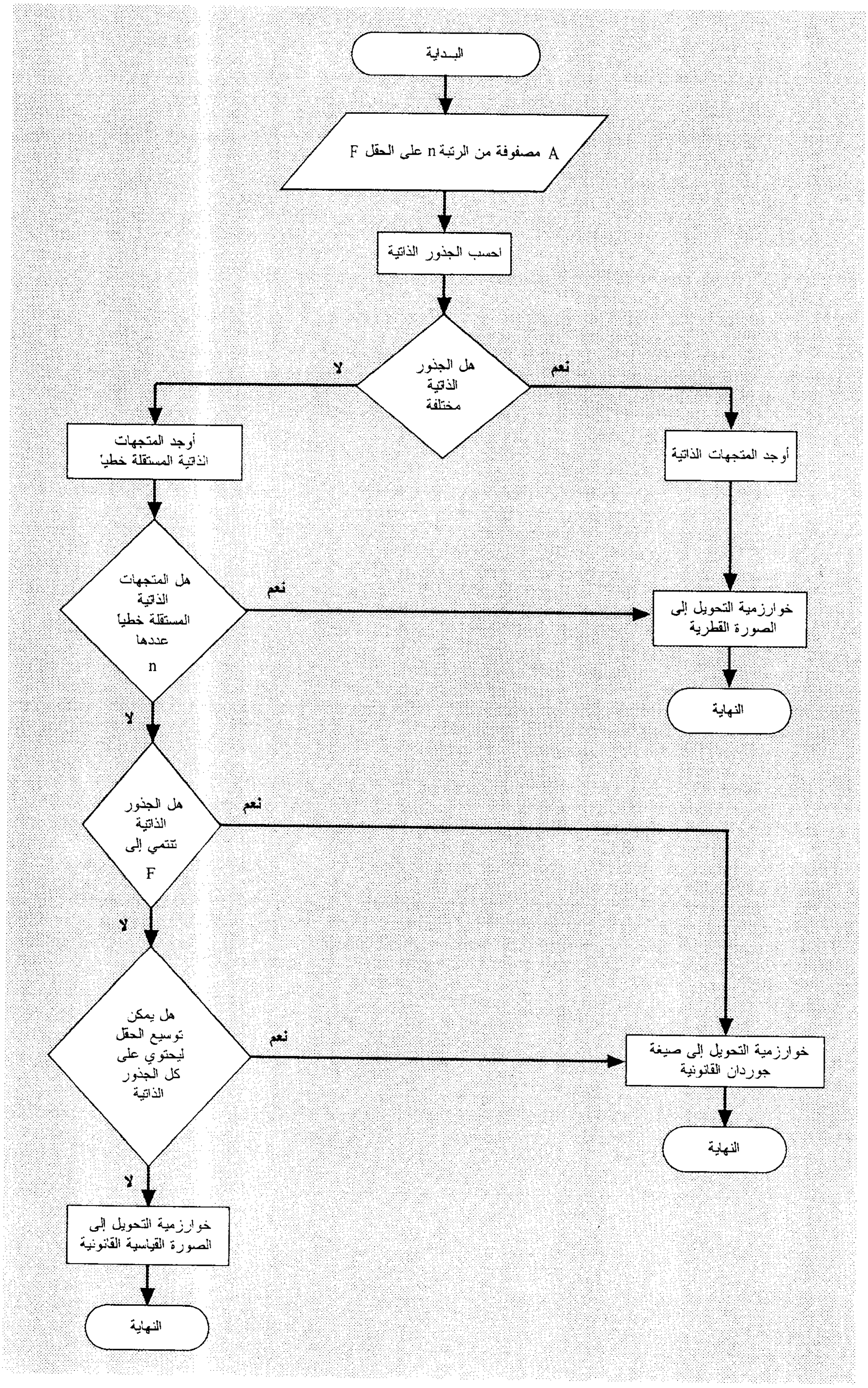
أما الفصل الثاني فقد درسنا فيه إمكانية وكيفية إيجاد مصفوفة قانونية بصيغة جوردان مشابهة لمصفوفة معطاة والتي لايمكن تحويلها إلى الصورة القطرية.

وفي الفصل الثالث درسنا إمكانية وكيفية إيجاد مصفوفة قانونية بصيغة قياسية مشابهة لمصفوفة معطاة.

كما استطعنا في آخر كل فصل أن نوجز المعلومات التي وردت فيه في شكل خوارزمية مكتفية ذاتياً لتحويل أي مصفوفة إلى إحدى الصيغ القانونية، ويمكن استخدام هذه الخوارزمية من قبل الباحثين والدارسين مباشرة دون الحاجة إلى مراجعة محتويات الرسالة، بعد ملاحظة إمكانية ذلك من المخطط المدرج في الصفحة اللاحقة.

وأخيراً نتمنى أن نكون قد وفقنا في تقديم ولو شيء بسيط يفيد الباحثين والدارسين في المجالات المختلفة.

والله الموفق


البداية
A مصفوفة من الرتبة n على الحقل F
احسب الجذور الذاتية
هل الجذور الذاتية مختلفة
لا
نعم
أوجد المتجهات الذاتية المستقلة خطياً
أوجد المتجهات الذاتية
هل المتجهات الذاتية المستقلة خطياً عددها n
نعم
خوارزمية التحويل إلى الصورة القطرية
النهاية
لا
هل الجذور الذاتية تنتمي إلى F
نعم
لا
هل يمكن توسيع الحقل ليحتوي على كل الجذور الذاتية
نعم
خوارزمية التحويل إلى صيغة جوردان القانونية
النهاية
لا
خوارزمية التحويل إلى الصورة القياسية القانونية
النهاية

الفصل الأول

سندرس في هذا الفصل كيفية تحويل المصفوفة المربعة A من الرتبة n على الحقل $\mathfrak{R}$ إلى الصورة القطرية، حيث يمكن تحويل A إلى الصورة القطرية إذا كان عدد المتجهات الذاتية المستقلة خطياً يساوي n. كذلك أدرجنا في هذا الفصل بعض التعاريف والمبرهنات الأساسية التي رأينا أن وجودها ضروري ونحتاج إليه خلال هذه الرسالة.

1.1 مفاهيم أساسية

فيما يأتي ندرج بعض الرموز والتعاريف الأساسية خلال هذه الرسالة، فالرمز $V = V(n,F)$ يعني فضاء المتجهات V المعرف على الحقل F الذي بعده n وسيكون V غير تافه، أي: $V \neq \{0\}$ وأن R ستمثل حلقة إبدالية ذات عنصر محايد إلا إذا ذكرنا خلاف ذلك، علماً أننا نعمل على مصفوفات معرفة على حقل الأعداد الحقيقية $\mathfrak{R}$، وبالتالي فإننا نعمل على حلقة إبدالية ذات عنصر محايد ضمناً.

إذا ذكرت هذه المعلومات فهي للتأكيد.

حقل الأعداد القياسية يمثل بالرمز Q، إذا كانت A مصفوفة فإن $r(A)$ يمثل مرتبة A وهي عدد الأعمدة أو الصفوف المستقلة خطياً في A .

الرمز $< x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n >$ يعني أن فضاء المتجهات (أو الموديول) مولد بواسطة العناصر $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ ، كذلك فإن $R[x]$ تعني حلقة متعددات الحدود في المتغير x على R ، إذا كانت R حقل مثلاً F فإننا نكتب $F[x]$.

إذا كان $f(x), g(x) \in F[x]$ فإن القاسم المشترك الأعظم إليهما هو $(f(x), g(x))$. وإذا كانت $(f(x), g(x)) = 1$ فنقول أن $f(x)$ و $g(x)$ أولية معاً.

إذا كانت $T : V \to W$ دالة فإن TV مجموعة الصور لـ V.

تعريف (1.1.1):

نقول عن فضاء المتجهات V المعرف على F بأنه جمع مباشر من الفضاءات الجزئية $W_1 , W_2 ,......., W_n$ ونكتب:

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus .... \oplus W_n$$

إذا كان:

أ- لكل: $v \in V$ يوجد: $w_i \in W_i \quad , \quad i = 1 , 2 ,....., n$

بحيث:

$$v = w_1 + w_2 + ... + w_n$$

ب- و $W_i \underset{i \neq j}{\cap} W_j = \{0\} \quad , \quad 1 \leq i, j \leq n$

1.2 التحويلات الخطية:

رغم أن المصفوفات التي تمثل التحويلات الخطية معرفة على الأعداد الحقيقية إلا أننا ندرج التعاريف والمبرهنات الخاصة بها بصيغة عامة لكي تكون الفائدة اكثر شمولاً.

تعريف (1.2.1):

ليكن $T : V \rightarrow W$ دالة من فضاء المتجهات V على F إلى فضاء المتجهات W على F. فإن T تسمى تحويل خطي إذا كان:

أ- $T(u + v) = T(u) + T(v) \quad \forall \quad u , v \in V$

ب- $T(\alpha v) = \alpha \, T(v) \quad \forall \quad \alpha \in F , v \in V$

وإذا كان $V = W$ فإن T يسمى راسم خطي.

مجموعة التحويلات الخطية من V إلى W تمثل بالرمز $L(V , W)$ وإذا كانت $V = W$ فتمثل بالرمز $L(V)$.

تعريف (1.2.2):

ليكن $T : V \to W$ تحويل خطي من فضاء المتجهات V على الحقل F إلى فضاء المتجهات W على F ، إذا كان T تحويل أحادي $(1-1)$ وشامل (onto) فإن T يسمى تشاكل تقابلي. ونقول أن V متشاكل تقابلياً مع W. ويكتب $V \simeq W$.

تعريف (1.2.3):

إذا كان $T : V \to W$ تحويل خطي فإن:

أ- نواة T هو:

$$\text{Ker}\,(T) = \{v \in V : T\,(v) = 0\}$$

ب- مدى T هو:

$$R\,(T) = \{w \in W : w = T\,(v)\ ,\ v \in V \ \text{لبعض}\ \}$$

واضح أنه إذا كانت T دالة شاملة فإن مدى T يكون W.

مبرهنة (1.2.4):

إذا كان $T : V \to W$ تحويل خطي فإن:

$$\text{Ker}\,(T) = \{0\} \Leftrightarrow T \text{ is } 1-1$$

مبرهنة (1.2.5):

ليكن $T \in L\,(V,W)$ تحويل خطي حيث V و W لهما نفس البعد، فإن الجمل الآتية متكافئة:

1. T تكون أحادية $(1-1)$.
2. T تكون شاملة (onto).
3. T تكون قابلة للعكس.

4. T تكون تشاكل تقابلي.

5. $r(T) = \dim(R(T)) = \dim V$

6. $\dim(\text{Ker } T) = 0$

7. إذا كان $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ أساس إلى V فإن: $\{T x_1, T x_2, \ldots, T x_n\}$ أساس إلى W.

تعريف (1.2.6):

إذا كان $T \in L(V,W)$ تحويل خطي من فضاء المتجهات V على F إلى فضاء المتجهات W على F حيث $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ أساس V و $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ أساس W. فإنه يمكن التعبير عن T بمصفوفة تكون متجهات أعمدتها نسبة إلى:

$$T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$$

ويمكن توضيح ذلك كمايلي:

$$T(v_i) \in W \Rightarrow \exists\, C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_m} \in F$$

بحيث:

$$T(v_i) = C_{i_1} w_1 + C_{i_2} w_2 + \ldots +, C_{i_m} w_m$$

$$\Rightarrow \quad T(v_i) = (w_1, w_2, \ldots, w_m)\begin{pmatrix} C_{i_1} \\ C_{i_2} \\ . \\ C_{i_m} \end{pmatrix}$$

لكل: $i = 1, 2, \ldots, n$

المصفوفة $C = (C_{ij})$ من الرتبة $m \times n$ تسمى مصفوفة التحويل الخطي T.

ويمكن توضيح ذلك بالمثال الاتي:

إذا كان $T : V = R^2 \to W = R^2$ معطى بواسطة:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

حيث:

$v_1 = e_1 = (1\ ,\ 0)$ و $v_2 = e_2 = (0\ ,\ 1)$ الأساس القياسي إلى $V = R^2$.

و $w_1 = (1\ ,\ 1)$ و $w_2 = (2\ ,\ 0)$ أساس إلى $W = R^2$. فإن:

$$T\left(v_1\right) = T\left(e_1\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = C_{11} w_1 + C_{21} w_2$$

$$\Rightarrow C_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_{21} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

كذلك:

$$T\left(v_2\right) = T\left(e_2\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = C_{12} w_1 + C_{22} w_2$$

$$\Rightarrow C_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_{22} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} C_{12} \\ C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

إذاً مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة إلى الأساس $\{v_1\ ,\ v_2\}$ هي:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

لمزيد من المعلومات أنظر [2].

تعريف (1.2.7):

إذا كان كل من $W = \{w_1, w_2, \ldots\ldots, w_n\}$ و $U = \{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n\}$ أساس إلى فضاء المتجهات V فإن: $M\,(U\,, W)$ هي المصفوفة $\left(b_{kl}\right)$ حيث أن:

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} \; w_j \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

ولـو كـان $T \in L(V)$ حلقـة الـرواسم الخطيـة علـى V. نكتب $A = M(T, W)$ للمصفوفة (a_{kl}) التي هي مصفوفة الراسم الخطي T بالنسبة للأساس W المعرف بواسطة:

$$T(w_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \; w_j \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

كذلك $B = M(T, U)$ مصفوفة الراسم الخطي T بالنسبة للأساس U.

إذاً:

$$B = X^{-1} A X$$

حيث $X = M(U, W)$ مصفوفة قابلة للعكس من الرتبة n وهي مصفوفة الإنتقال من أساس إلى آخر.

تعريف (1.2.8):

إذا كان T راسم خطي على فضاء المتجهات V وكان W فضاء جزئي في V فإن W يسمى فضاء جزئي غير متغير تحت تأثير T إذا كان:

$$T(w) \in W \quad , \forall\, w \in W$$

إضافة إلى ذلك فإن: $T|_w$ تمثل تحديد الراسم T على الفضاء الجزئي W بحيث:

$$T|_w(u) = T(u) \quad , \; \forall\, u \in W$$

مبرهنة (1.2.9):

نفرض أن $T \in L(V)$ و $V = v_1 \oplus v_2 \oplus \ldots\ldots \oplus v_k$ حيث v_i فضاء جزئي غير متغير تحت تأثير T لكل $i = 1, 2, \ldots, k$ ، ونفرض أن $v^{(i)}$ أساس إلى v_i و $V = \bigcup_{i=1}^{k} v^{(i)}$ ، فإن v تكون أساس إلى V.

و $M(T, V)$ تكون على الشكل:

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{bmatrix}$$

حيث أن:

$$A_i = M\left(T|_{v_i}\ ,\ v^{(i)}\right)$$

مصفوفة من الرتبة n_i.

لمزيد من المعلومات أنظر [6].

1.3 القيم والمتجهات الذاتية:

في عملنا هذا نحتاج إلى تحديد القيم الذاتية لاكثر من حالة، ورغم أن تحديدها يكون من السهل أو الممكن عندما تكون المصفوفة صغيرة 2×2 أو 3×3 أو 4×4 ، إلا أنه في كثير من المسائل غالباً ماتكون المصفوفة A كبيرة لدرجة أن يكون من غير العملي تعيين القيم الذاتية بالطرق الإعتيادية، لان ذلك يتطلب إيجاد جذور لمعادلة من درجة كبيرة، ومعروف أن تحديد الجذور لمعادلة من الدرجة الخامسة فما فوق ليس بالعمل السهل، لذلك نستخدم طرق عددية لإيجاذ القيم الذاتية. للمزيد من المعلومات أنظر [2 ، 3].

على ضوء معلوماتنا في إيجاد الحلول غير التافهة لمنظومة المعادلات الخطية المتجانسة، وتعريف القيم والمتجهات الذاتية، ندرج هذه المبرهنة التي تبين العلاقات بينهما.

مبرهنة (1.3.1):

إذا كانت A مصفوفة من الرتبة n على الحقل $\Re$ فالعبارات الآتية متكافئة:

1. λ قيمة ذاتية لـ A.
2. يوجد لمنظومة المعادلات الخطية $(A - \lambda I)\, x = 0$ حل غير تافه.
3. يوجد متجه غير صفري X في $\Re^n$ بحيث: $A X = \lambda X$

4. λ جذر حقيقي لمتعددة الحدود المميزة $\det(A - \lambda I) = 0$.

تعريف (1.3.2):

يقال للمصفوفتين A ، B من الرتبة n أنهما متشابهتان (similar) إذا وجدت مصفوفة X من الرتبة n قابلة للعكس، بحيث:

$$A = X^{-1} B X$$

المصفوفة X هي مصفوفة الإنتقال من المصفوفة B إلى المصفوفة A (وهي ذاتها مصفوفة الإنتقال من أساس إلى آخر)، وكيفية تحديدها عندما تكون A بصيغة قانونية هو محور بحثنا هذا.

مبرهنة (1.3.3):

المصفوفات المتشابهة لها نفس متعددة الحدود المميزة ونفس متعدد الحدود الأصغر، ورتبتها متساوية.

هذه المبرهنة تمكننا من معرفة أو تمييز المصفوفات غير المتشابهة، وتدقيق صحة عملنا عند تحويل مصفوفة إلى مصفوفة مشابهة لها.

تعريف (1.3.4):

لتكن A ، B مصفوفتين من الرتبة n على $\Re$، فنقول إن B تكافئ A (على $\Re$) إذا وجدت مصفوفتان X ، Y من الرتبة n قابلتان للعكس (على $\Re$) بحيث:

$$B = X A Y$$

لاحظ أنه لو كانت $X = Y^{-1}$ فإن المصفوفتين المتكافئتين A ، B تصبحان متشابهتين.

1.4 المودیولات:

بعض المصادر تعرف الموديول على حلقة إبدالة فقط والاخرى على حلقة إبدالية ذات عنصر محايد، وهذا ماسنعتمده لكوننا أساساً نعمل على حقل $\Re$.

تعريف (1.4.1):

إذا كانت R حلقة إبدالية ذات عنصر محايد فإن M يسمى موديول على R إذا تحققت الشروط الآتية.

1. $(M\ ,\ +)$ زمرة إبدالية.
2. $r\ .\ m \in M$
3. $r\left(m_1 + m_2\right) = r\,m_1 + r\,m_2$
4. $\left(r_1 + r_2\right) m = r_1\,m + r_2\,m$
5. $\left(r_1\,r_2\right) m = r_1\left(r_2\,m\right)$
6. $1 \times m = m$.

لكل $1\ ,\ r\ ,\ r_1\ ,\ r_2\ \in R$ و $m\ ,\ m_1\ ,\ m_2\ \in M$.

تعريف (1.4.2):

الموديول M المعرف على الحلقة R يسمى موديول مولد بشكل منتهٍ (Finitely-generated) إذا أمكننا توليد M بواسطة مجموعة منتهية من عناصر M.

ويسمى دائري إذا أمكننا توليد M بواسطة عنصر واحد في M.

إذاً كان V فضاء متجهات على الحقل F بُعده n، فإن V يكون دائري إذا وفقط إذا كان $\dim V = 1$.

تعريف (1.4.3):

المثالي I في الساحة (Integral domain) R يسمى مثالي أساسي (Principal ideal) لـ R إذا كان I يتولد بواسطة عنصر $a \neq 0$ في R بحيث:

$$I = a\,R$$

الحلقة R تسمى ساحة أساسية إذا كانت R ساحة، وأي مثالي في R يكون مثالي أساسي.

مبرهنة (1.4.4):

إذا كان M و N موديولان على R و $\phi : M \to N$ تشاكل (Homomorphism) على R فإن:

$$M/Ker(\phi) \simeq Im(\phi)$$

حيث: $Im(\phi)$ مدى ϕ.

وإذا كان التشاكل شامل (epimorphism) فواضح أن:

$$M/Ker(\phi) \simeq N$$

تعريف (1.4.5):

نقول عن الموديول M المعرف على R بأنه جمع مباشر من الموديولات الجزئية $m_1 , m_2 , ... , m_n$ ويكتب:

$$M = m_1 \oplus m_2 \oplus ..... \oplus m_n$$

إذا كان:

أ- $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$

ب- $m_i \bigcap_{i \neq j} m_j = \{0\} \quad , \quad 1 \leq i , j \leq n$

للمزيد من المعلومات أنظر [6].

1.5 التحويل إلى الصورة القطرية:

تعريف (1.5.1):

تسمى المصفوفة المربعة A من الرتبة n قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية (أو قابلة للقطر) إذا وجدت مصفوفة قابلة للعكس P بحيث $P^{-1} A P$ مصفوفة قطرية.

المبرهنة الآتية تعتبر من المبرهنات المعروفة في الجبر الخطي وتستخدم في إثبات بعض المبرهنات في هذه الرسالة لذلك أدرجناها لأهميتها.

مبرهنة (1.5.2):

إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن:

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ صفوف (أو أعمدة) A مستقلة خطياً.

مبرهنة (1.5.3):

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الرتبة n فإن العبارات الآتية متكافئة:

أ- A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية.

ب- للمصفوفة A عدد n من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً.

البرهان:

أ $\Leftarrow$ ب:

نفرض أن A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية.

إذا توجد مصفوفة P قابلة للعكس حيث:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

بحيث تكون $P^{-1} A P$ مصفوفة قطرية.

نضع:

$$D = P^{-1} A P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

بضرب (1) من اليسار في P نحصل على $AP = PD$.

أي أن:

$$AP = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & & P_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 P_{11} & \lambda_2 P_{12} & \dots & \lambda_n P_{1n} \\ \lambda_1 P_{21} & \lambda_2 P_{22} & & \lambda_n P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 P_{n1} & \lambda_2 P_{n2} & & \lambda_n P_{nn} \end{bmatrix} \dots (2)$$

إذا فرضنا أن $\mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 , ..., \mathbf{P}_n$ ترمز لمتجهات أعمدة المصفوفة P.

إذاً من (2) الأعمدة المتتابعة للمصفوفة AP هي:

$$\lambda_1 \mathbf{P}_1 , \lambda_2 \mathbf{P}_2 , ..., \lambda_n \mathbf{P}_n$$

ولكن أعمدة AP هي $A\mathbf{P}_1 , A\mathbf{P}_2 , ..., A\mathbf{P}_n$ لذلك يجب أن يكون لدينا:

$$A\mathbf{P}_1 = \lambda_1 \mathbf{P}_1 \ , \ A\mathbf{P}_2 = \lambda_2 \mathbf{P}_2 \ ,......, \ A\mathbf{P}_n = \lambda_n \mathbf{P}_n \quad .... (3)$$

بما أن P قابلة للعكس فإن متجهات أعمدتها تكون جميعها غير صفرية.

إذاً من (3) $\lambda_1 , \lambda_2 , ..., \lambda_n$ تكون القيم الذاتية لـ A وتكون $\mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 , ..., \mathbf{P}_n$ متجهات ذاتية مناظرة للقيم الذاتية λ_i.

وحيث أن P قابلة للعكس إذاً: $\{\mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 , \mathbf{P}_3 , ..., \mathbf{P}_n\}$ تكون مجموعة مستقلة خطياً. مبرهنة (1.5.2).

إذاً للمصفوفة A عدد n من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً.

ب $\Leftarrow$ أ:

نفرض أن A لها n من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً وهي $P_1, P_2, ..., P_n$ لقيم ذاتية مناظرة $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ على التوالي.

نضع:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

المصفوفة التي متجهات أعمدتها هي: $P_1, P_2, ..., P_n$.

إذاً تكون أعمدة حاصل الضرب AP هي: $A P_1, A P_2, ..., A P_n$.

ولكن:

$$A P_1 = \lambda_1 P_1 \;,\; A P_2 = \lambda_2 P_2 \;, ...,\; A P_n = \lambda_n P_n$$

إذاً:

$$A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 P_{11} & \lambda_2 P_{12} & \cdots & \lambda_n P_{1n} \\ \lambda_1 P_{21} & \lambda_2 P_{22} & & \lambda_n P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 P_{n1} & \lambda_2 P_{n2} & & \lambda_n P_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & & P_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= P D \quad .... \quad (4)$$

حيث: $D = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]$ هي المصفوفة القطرية التي لها القيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ على القطر.

بما أن متجهات أعمدة المصفوفة A مستقلة خطياً إذاً P قابلة للعكس (مبرهنة 1.5.2).

إذاً يمكن كتابة المعادلة (4) على الصورة:

$$P^{-1} A P = D$$

أي أن A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية.

نلاحظ أنه إذا كانت A مصفوفة قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية فإن عناصر القطر ستكون القيم الذاتية للمصفوفة A.

مبرهنة الإستقلال الخطي الآتية مهمة ونحتاج إليها في كثير من البراهين خلال البحث وخاصة في إثبات المجموعة التي تكون أساس لأي فضاء متجهات.

مبرهنة (1.5.4):

إذا كانت $v_1 , v_2 ,......, v_n$ متجهات ذاتية للمصفوفة A مناظرة للقيم الذاتية المختلفة $\lambda_1 , \lambda_2 ,......., \lambda_n$ على التوالي، فإن $\{v_1 , v_2 ,......, v_n\}$ تكون مجموعة مستقلة خطياً.

البرهان:

نفرض أن $S = \{v_1 , v_2 ,......, v_n\}$ معتمدة خطياً، وحيث أن أي متجه ذاتي هو غير صفري (من التعريف) فإن:

$\{v_1\}$ مستقل خطياً، ليكن r هو أكبر عدد بحيث تكون $\{v_1 , v_2 ,......, v_r\}$ مجموعة مستقلة خطياً، ونحن فرضنا في البداية أن S مجموعة معتمدة خطياً. فإن r تحقق الخاصية $1 \le r < n$ ومن تعريف r تكون $\{v_1 , v_2 ,......, v_{r+1}\}$ معتمدة خطياً، لذلك توجد أعداد حقيقية $c_1 , c_2 ,......, c_{r+1}$ ليست جميعها أصفاراً بحيث أن:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_{r+1} v_{r+1} = 0 \quad ...... (1)$$

بتطبيق A على (1) واستخدام العلاقات:

$$A v_1 = \lambda_1 v_1 \;,\; A v_2 = \lambda_2 v_2 ,......., A v_{r+1} = \lambda_{r+1} v_{r+1}$$

نحصل على:

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + ... + c_{r+1} \lambda_{r+1} v_{r+1} = 0 \quad ..... (2)$$

بضرب المعادلة (1) في λ_{r+1} والطرح من (2) نحصل على:

$$c_1\left(\lambda_1-\lambda_{r+1}\right)v_1+c_2\left(\lambda_2-\lambda_{r+1}\right)v_2+\ldots\ldots+c_{r+1}\left(\lambda_r-\lambda_{r+1}\right)v_{r+1}=0$$

بما أن: $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_r\}$ مستقلة خطياً، إذاً:

$$c_1\left(\lambda_1-\lambda_{r+1}\right)=c_2\left(\lambda_2-\lambda_{r+1}\right)=\ \ldots\ldots\ =c_{r+1}\left(\lambda_r-\lambda_{r+1}\right)=0$$

وحيث أن $\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots\ldots, \lambda_{r+1}$ جميعها مختلفة. إذاً

$$c_1=c_2=\ \ldots\ldots\ =c_r=0\ \ .\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

بالتعويض في [1] نحصل على:

$$c_{r+1}\,v_{r+1}=0$$

وحيث أن v_{r+1} غير صفري. إذاً:

$$c_{r+1}=0\quad .\ .\ .\ .\ .\ (4)$$

إذاً المعادلات (3) و (4) تناقضان أن $c_1 , c_2 , \ldots\ldots , c_{r+1}$ ليست جميعها أصفاراً.

إذا: $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$ تكون مجموعة مستقلة خطياً.

من المبرهنة السابقة نصل إلى النتيجة الآتية:

نتيجة (1.5.5):

إذا كانت المصفوفة A من الرتبة n لها عدد n من القيم الذاتية المختلفة، فإن A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية.

البرهان:

إذا كانت: $S=\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$ مجموعة من المتجهات الذاتية المناظرة للقيم الذاتية المختلفة $\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots\ldots, \lambda_n$ فإن (من المبرهنة 1.5.4) المجموعة S تكون مستقلة خطياً، وبالتالي طبقاً (مبرهنة 1.5.3) تكون A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية.

ملاحظة:

العبارة أعلاه من النوع $p \to q$ فإذا كانت p خاطئة فإن العبارة صحيحة سواء كانت q صحيحة أم خاطئة.

أي أنه قد تكون المصفوفة A من الرتبة n قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية بالرغم من أنه ليس لها n من القيم الذاتية المختلفة.

مثلا: المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ مصفوفة قطرية رغم أن قيمها الذاتية متساوية.

بينما المصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ لايمكن تحويلها إلى الصورة القطرية لأن فضاء المتجهات المناظر للقيمة الذاتية المتكرر $\lambda = 0$ بعده 1.

أي لايوجد عدد 2 من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً.

فيما يلي نوجز ماسبق من معلومات في شكل خوارزمية مكتفية ذاتياً لتحويل أي مصفوفة A من الرتبة n x n على $\Re$ إلى الصورة القطرية.

1. نحدد القيم الذاتية للمصفوفة A من المعادلة $\det(A - \lambda I) = 0$ ولتكن $\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_n$.
2. نحدد المتجهات الذاتية المستقلة خطياً والمناظرة للقيم الذاتية λ_i من المعادلة $(A - \lambda_i I)\, x = 0$.
3. إذا كان عدد المتجهات الذاتية المستقلة خطياً والمرتبطة بالقيم الذاتية لـ A أقل من n فلا يمكن تحويلها إلى قطرية، أما إذا كان عدد المتجهات الذاتية المستقلة خطياً يساوي n فيمكن تحويلها إلى قطرية ونستمر إلى الخطوة القادمة.
4. نكون مصفوفة الإنتقال P التي أعمدتها المتجهات الذاتية المستقلة خطياً في (2).
5. نحسب P^{-1}.
6. نحسب $P^{-1} A P$ التي تكون مصفوفة قطرية.

مثال 1:

عين المصفوفة P التي تحول A إلى الصورة القطرية ثم احسب $P^{-1} A P$ حيث :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

إذا كان ذلك ممكناً.

الحل:

نطبق خطوات الخوارزمية:

1. إيجاد القيم الذاتية:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \;\Rightarrow\; (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda\right) = 0$$
$$\Rightarrow\; \lambda_1 = 0 \;,\; \lambda_2 = 1 \;,\; \lambda_3 = 2$$

2. تحديد المتجهات الذاتية المستقلة خطياً المناظرة لـ λ_i من المعادلة $(A - \lambda_i I)\,x = 0$:

أ- $\lambda_1 = 0$:

$$(A - \lambda_1 I)\,x = 0 \;\Rightarrow\; A\,x = 0$$
$$\Rightarrow\; v_1 = (0\,,\,-1\,,\,1)^T$$

v_1 المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 0$.

ب- $\lambda_2 = 1$

$$(A - I)\,x = 0$$
$$\Rightarrow v_2 = (1\,,\,0\,,\,0)^T$$

جـ- $\lambda_3 = 2$

$$(A - 2I)\,x = 0$$
$$\Rightarrow v_3 = (0\,,\,1\,,\,1)^T$$

واضح أن v_1 ، v_2 ، v_3 متجهات مستقلة خطياً.

3. نكون مصفوفة الإنتقال P التي أعمدتها v_1 ، v_2 ، v_3 على التوالي:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. نحسب P^{-1}:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

5. نحسب $P^{-1} A P$:

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

وهي المصفوفة القطرية.

مثال 2:

بين ماإذا كانت المصفوفة A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية أم لا؟

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل:

1. القيم الذاتية لـ A هي $\lambda_1 = 3 \, , \, \lambda_2 = 1$، حيث λ_2 مكررة مرتين

2. إيجاد المتجهات الذاتية المناظرة لـ λ_1 و λ_2.

أ- $\lambda_1 = 3$

$$(A - \lambda I)\, x = 0$$
$$\Rightarrow (A - 3\,I)\, x = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = (1\,,\,0\,,\,0)^T$$

ب- $\lambda_2 = 1$

$$(A - I)\, x = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = (0\,,\,1\,,\,0)$$

إذاً لايوجد عدد 3 من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً وبالتالي فإن A غير قابلـة للتحويـل إلى الصورة القطرية.

للمزيد من المعلومات حول التحويل إلى الصورة القطرية أنظر [1 ، 3].

الفصل الثاني

التحويل لصيغة جوردان القانونية

Transition to Jordan Canonical Form

سندرس في هذا الفصل كيفية تحويل المصفوفة المربعة A من الرتبة n والتي لايمكن تحويلها إلى الصورة القطرية إلى أقرب صيغة للمصفوفة القطرية وهي صيغة جوردان القانونية، حيث يمكن تحويل أي مصفوفة على الحقل F إلى صيغة جوردان القانونية إذا كانت القيم الذاتية لمتعددة الحدود المميزة للمصفوفة تنتمي إلى F.

2.1 تحديد شكل مصفوفة جوردان القانونية المشابهة للمصفوفة المعطاة:

تعريف (2.1.1):

يقال لمصفوفة مربعة من الرتبة n على الشكل:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_r \end{bmatrix}$$

مصفوفة جوردان حيث J_i و $i = 1 , 2 ,\dots, r$ مصفوفات جوردان الجزئية (Jordan Blocks) من الرتبة n_i على الشكل:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_i & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

وأن: $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$.

λ_i أعلاه تمثل القيم الذاتيـة علـى طـول القطـر وأسـفل القطـر مباشـرة 1 وبقيـة العنـاصر أصفار.

ملاحظة: في بعض المصادر تكون مصفوفة جوردان الجزئية J_i بالشكل:

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \cdot & \vdots \\ \cdot & & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

مبرهنة مساعدة (2.1.2):

نفـرض أن $A = \left[\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right]$ حيث B مصفـوفة من الرتبة n و C مصفـوفة من الرتبة m فإن:

مرتبة A = مرتبة B + مرتبة C .

أي أن:

$$r(A) = r(B) + r(C)$$

يسمى هذا بالجمع المباشر للمصفوفات.

مبرهنة (2.1.3):

إذا كانت A مصفوفة من الرتبة n لها متعددة الحدود المميزة:

$$\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n1}\ (\lambda - \lambda_2)^{n2} \ldots (\lambda - \lambda_r)^{nr}$$

حيث $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ قيم ذاتية مختلفة. فإن A تشـابه (similar) مصفوفـة B علـى الشكل:

$$B=\begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_r \end{bmatrix}$$

حيث: B_i و $i=1\,,\,2,\ldots,r$ مصفوفة مثلثية سفلية (lower triangular) من الرتبة n_i عناصر قطرها λ_i.

مثال:

في المصفوفة A التي لها متعددة الحدود المميزة:

$$\phi\,(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^2\,\,(\lambda-\lambda_2)^2$$

حيث: $\lambda_1\neq\lambda_2$ فإن A تشابه المصفوفة:

$$\left[\begin{array}{c|c} B_1 & 0 \\ \hline 0 & B_2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|cc} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ r & \lambda_1 & & \\ \hline & 0 & \lambda_2 & 0 \\ & & h & \lambda_2 \end{array}\right]$$

حيث: B_1 و B_2 من الرتبة 2.

احتمالات صيغة جوردان القانونية لمصفوفة من الرتبة n تكون كما في الجدول الآتي:

قياس A (n x n)	متعدد الحدود المميز	إحتمالات شكل (صيغة) جوردان
2 x 2	$(\lambda-\alpha)^2$	$\left[\begin{array}{c\|c}\alpha & 0\\ \hline 0 & \alpha\end{array}\right]$ أو $\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 1 & \alpha\end{bmatrix}$
3 x 3	$(\lambda-\alpha)^3$	$\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 1 & \alpha & 0\\ 0 & 1 & \alpha\end{bmatrix}$ أو $\left[\begin{array}{cc\|c}\alpha & 0 & 0\\ 1 & \alpha & 0\\ \hline 0 & 0 & \alpha\end{array}\right]$ أو $\left[\begin{array}{c\|c\|c}\alpha & 0 & 0\\ \hline 0 & \alpha & 0\\ \hline 0 & 0 & \alpha\end{array}\right]$
4 x 4	$(\lambda-\alpha)^4$	$\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0\\ 1 & \alpha & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 1 & \alpha\end{bmatrix}$ أو $\left[\begin{array}{cc\|cc}\alpha & 0 & 0 & 0\\ 1 & \alpha & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 1 & \alpha\end{array}\right]$ أو $\left[\begin{array}{c\|c\|cc}\alpha & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & \alpha & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 1 & \alpha\end{array}\right]$ أو $\left[\begin{array}{c\|c\|c\|c}\alpha & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & \alpha & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & \alpha & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & \alpha\end{array}\right]$ أو $\left[\begin{array}{ccc\|c}\alpha & 0 & 0 & 0\\ 1 & \alpha & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & \alpha\end{array}\right]$
3 x 3	$(\lambda-\alpha)^2(\lambda-\beta)$	$\left[\begin{array}{cc\|c}\alpha & 0 & 0\\ 1 & \alpha & 0\\ \hline 0 & 0 & \beta\end{array}\right]$ أو $\left[\begin{array}{c\|c\|c}\alpha & & 0\\ \hline & \alpha & \\ \hline 0 & & \beta\end{array}\right]$
3 x 3	$(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)$	$\left[\begin{array}{c\|c\|c}\alpha & & 0\\ \hline & \beta & \\ \hline 0 & & \gamma\end{array}\right]$

لاحظ أنه في الحالة الأولى أعلاه، عندما تكون المصفوفة رتبة 2 x 2 فإن الإحتمالات ستكون: $\left[\begin{array}{c|c}J_1 & 0\\ \hline 0 & J_2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}\alpha & 0\\ \hline 0 & \alpha\end{array}\right]$ أو $[J_1]=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 1 & \alpha\end{bmatrix}$، وهكذا بقية الحالات.

تعريف (2.1.4):

الراسم الخطي $T \in L(V)$ يسمى خامد (nilpotent) إذا كان $T^n = 0$ لبعض $n \in Z^+$.

n تدعى دليل الراسم الخطي T وكذلك لمصفوفة الراسم T .

مبرهنة مساعدة (2.1.5):

إذا كانت A مصفوفة مثلثية علوية (أو سفلية) قياس n x n عناصر قطرها الرئيسي λ، فإن:

$$(A - \lambda I)^n = 0$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = H$$

$$\Rightarrow H^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad H^3 = [0]$$

إذن: H تكون خامدة.

مبرهنة (2.1.6):

إذا كانت D مصفوفة الراسم الخطي على فضاء المتجهات V وكانت خامدة، فإن المصفوفة التي تشابه D بالنسبة لأساس V تكون بصيغة جوردان القانونية.

وعدد مصفوفات جوردان الجزئية قياس i تكون:

$$r\left(D^{i-1}\right) - 2\,r\left(D^{i}\right) + r\left(D^{i+1}\right)$$

حيث: $D^0 = I$.

هذه المبرهنة تعني بشكل عام إذا كان T راسم خطي على فضاء المتجهات V له متعددة حدود مميزة $(X-\lambda)^n = 0$، فباستخدام مبرهنة كايلي-هاملتون (Caley - Hamilton) ينتج $(T-\lambda I)^n = 0$، نضع $D = T - \lambda I$

$$\Rightarrow D^n = 0$$

إذن باستخدام المبرهنة السابقة فإن D تشابه مصفوفة على شكل صيغة جوردان القانونية، ومنه ينتج أن:

$$T = D + \lambda I$$

تكون في صيغة جوردان القانونية.

المصفوفتان اللتان تشابهان D و $D + \lambda I$ بالنسبة للأساس $x_n, \ldots, x_2, x_1$ هما على التوالي:

$$\begin{bmatrix} J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & J_2 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_r \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} J_1+\lambda I & \cdots & & 0 \\ \vdots & J_2+\lambda I & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & J_r+\lambda I \end{bmatrix}$$

حيث J_i و $i = 1, 2, \ldots, r$ مصفوفات جوردان الجزئية، وباستخدام المبرهنة أيضاً يمكن إيجاد عدد هذه المصفوفات الجزئية من الرتبة r للمصفوفة D بواسطة:

$$r\left(D^{r-1}\right) - 2\, r\left(D^{r}\right) + r\left(D^{r+1}\right)$$

وعدد المصفوفات الجزئية من الرتبة r للراسم T تكون:

$$r\,(T-\lambda I)^{r-1} - 2\, r\,(T-\lambda I)^{r} + r\,(T-\lambda I)^{r+1}$$

حيث ستكون λ على القطر.

لمزيد من المعلومات حول المبرهنات السابقة راجع [9].

مثال:

عين صيغة جوردان القانونية للمصفوفة A حيث:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$
$$\Rightarrow (\lambda - 1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

نحسب رتبة المصفوفات $D = (A - \lambda I)$ و $D^2 = (A - \lambda I)^2$.

$$D = A - I = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow r(D) = 2$$

$$D^2 = (A - I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow r(D^2) = 1$$

لاحظ أن: $D^3 = [0] \Rightarrow r(D^3) = 0$

وأن: $r(D^0) = 3$

لإيجاد عدد مصفوفات جوردان الجزئية نطبق العلاقة:

$$r(D^{i-1}) - 2\,r(D^i) + r(D^{i+1})$$

1. عدد مصفوفات جوردان الجزئية من الرتبة 1 :

$$r(D^0) - 2\,r(D) + r(D^2) = 0$$

2. عدد مصفوفات جوردان الجزئية من الرتبة 2 هو:

$$r(D) - 2\,r(D^2) + r(D^3) = 0$$

3. عدد مصفوفات جوردان الجزئية من الرتبة 3 هو:

$$r(D^2) - 2\,r(D^3) + r(D^4) = 1$$

إذن D تشابه المصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

بما أن $D = T - \lambda\, I$، إذن:

$$T = D + \lambda\, I \quad \Rightarrow \quad T = D + I$$

أي أن T تشابه المصفوفة: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

في المثال السابق، المصفوفة المشابهة للمصفوفة A تملك مصفوفة جزئية واحدة فقط من الرتبة 3 ، وفيما يلي مثال آخر مختلف تتجزأ فيه المصفوفة المشابهة.

مثال:

عين صيغة جوردان القانونية للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\det\ (A - \lambda\, I) = 0$$
$$\Rightarrow (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1\ ,\ \lambda_2 = 2$$

حيث $\lambda_2\ ,\ \lambda_1$ مكررة مرتين

إذاً المصفوفة A متشابهة مع المصفوفة $\left[\begin{array}{c|c} B_1 & \\ \hline & B_2 \end{array}\right]$

حيث B_1 و B_2 نسبة إلى $(\lambda - 1)^2$ و $(\lambda - 2)^2$ على التوالي.

نحسب مرتبة كل من $(A - I)^i$ و $(A - 2I)^i$ حيث $i = 1, 2, \ldots..$.

$$D_1 = A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D_2 = A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r\left(D_1\right) = 3 \ , \ r\left(D_1^2\right) = 2 \ , \ r\left(D_1^3\right) = 2 \ , \ r\left(D_1^0\right) = 4 \ ,$$
$$r\left(D_2\right) = 3 \ , \ r\left(D_2^2\right) = 2 \ , \ r\left(D_2^3\right) = 2 \ , \ r\left(D_2^0\right) = 4$$

نحدد عدد المصفوفات الجزئية لكل منهما (أي لـ B_1 و B_2) من العلاقة:

$$r\left(D^{i-1}\right) - 2\,r\left(D^{i}\right) + r\left(D^{i+1}\right)$$

أولاً: للمصفوفة B_1

أ- عدد المصفوفات الجزئية من الرتبة 1 = 0 .

ب- عدد المصفوفات الجزئية من الرتبة 2 = 1 .

ثانياً: للمصفوفة B_2 :

أ- عدد المصفوفات الجزئية من الرتبة 1 = 0 .

ب- عدد المصفوفات الجزئية من الرتبة 2 = 1 .

إذن المصفوفة A مشابهة لمصفوفة بصيغة جوردان القانونية:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

2.2 تحديد مصفوفة الإنتقال إلى صيغة جوردان القانونية:

تعريف (2.2.1):

ليكن $T \in L(V)$ و x أي متجه غير صفري في فضاء المتجهات V. الفضاء الجزئي المتولد بواسطة مجموعة المتجهات $\{x, Tx, T^2x, ...\}$ يسمى فضاء جزئي دوراني للراسم T (T - cyclic subspase) متولد بواسطة المتجه x . ويرمز له بالرمز:

$$Z(x,T)=\{x, Tx, T^2x, \ldots\}$$

الفضاء الجزئي W في V يسمى فضاء جزئي دوراني لـ T إذا وجد $x \in V$ بحيث $W=Z(x,T)$.

واضح أنه إذا كان x متجه ذاتي (eigen vector) فإن $Z(x,T)$ فضاء متجهات جزئي ذو بعد واحد فقط.

المبرهنة المساعدة الآتية والمبرهنة التي تليها ستكوّنا الأساس في بناء مصفوفة الإنتقال إلى صيغة جوردان القانونية.

مبرهنة مساعدة (2.2.2):

إذا كانت $T \in L(V)$ و $Z(x,T)$ فضاء جزئي دوراني للراسم T متولد بواسطة المتجه غير الصفري $x \in V$ فإنه يوجد عدد صحيح موجب ووحيد k بحيث $\{x, Tx, T^2x, \ldots T^{k-1}x\}$ أساس لـ $Z(x,T)$.

البرهان:

نؤكد هنا ما ثبتناه في بداية البحث من أن V فضاء متجهات ذو بعد منته.

إذاً: $Z(x,T) = < x, Tx, T^2x, \ldots >$ فضاء جزئي دوراني بعده منته، وأن عدد المتجهات المستقلة خطياً لايمكن أن يتجاوز بعد $Z(x,T)$ إذن سنصل حتماً إلى k بحيث T^kx , $(k \geq 1)$ معتمدة على المتجهات التي تسبقه، أي يوجد عناصر $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ في الحقل F بحيث:

$$T^kx = a_0x + a_1Tx + \ldots + a_{k-1}T^{k-1}$$

كذلك:

$$T^{k+1}x = T\left(T^kx\right) = T\left(a_0x + a_1Tx + \ldots + a_{k-1}T^{k-1}\right)$$
$$\Rightarrow T^{k+1}x = a_0Tx + a_1T^2x + \ldots + a_{k-1}T^kx$$
$$= \left(a_0Tx + a_1T^2x + \ldots + a_{k-2}T^{k-1}x\right) +$$
$$+ a_{k-1}\left(a_0x + a_1Tx + \ldots + a_{k-1}T^{k-1}x\right)$$
$$\Rightarrow T^{k+1}x \in \; < x, Tx, \ldots, T^{k-1}x >$$

وهذا يتحقق لكل قوة (أس) $T^i x$, $i \geq k$.

إذن:

$\{x, Tx, T^2 x, \ldots.. T^{k-1} x\}$ تولد $Z(x, T)$.

وبما أنها مستقلة خطياً. إذن تكون أساس للفضاء الجزئي الدوراني $Z(x, T)$ للراسم T.

مبرهنة (2.2.3):

إذا كان $T \in L(V)$ راسم خامد (nilpotent) للدليل k $(T^k = 0)$ وكان $x \in V$ أي متجه بحيث $T^{k-1} x \neq 0$ فإن : $\{x, Tx, T^2 x, \ldots.. T^{k-1} x\}$ أساس للفضاء الجزئي الدوراني $Z(x, T)$.

لاحظ أن هذه المبرهنة تحدد اختيار مولد $Z(x, T)$ بأي متجه لاصفري x بحيث $T^{k-1} x \neq 0$ وبالتالي فهي تلقي الضوء على كيفية اختيار أساس مصفوفة الإنتقال.

البرهان:

من المبرهنة المساعدة السابقة (2.2.2) $A = \{x, Tx, T^2 x, \ldots.. T^{j-1} x\}$ أساس لـ $Z(x, T)$ ، لذلك فإن $\dim Z(x, T) = j$ نقارن الأساس بالمجموعة $B = \{x, Tx, T^2 x, \ldots.. T^{k-1} x\}$.

بما أن $T^i x = 0$ لكل $i \geq k$ وأن الأساس أعلاه A لايمكن أن يحتوي على المتجه الصفري. إذن جميع عناصر A محتواه في المجموعة B.

$$\Rightarrow j \leq k$$

وحيث أن $\dim Z(x, T) = j$ ، فإن هذا ينتج أن $k \leq j$ وبالتالي فإن: $j = k$.

بقى أن نثبت أن مجموعة العناصر في B مستقلة خطياً.

ليكن:

$$c_0 x + c_1 Tx + c_2 T^2 x + \ldots.. + c_{k-1} T^{k-1} x = 0$$

بتطبيق T^{k-1} على الطرفين نجصل على:

$$c_0 T^{k-1} x + c_1 T^k x + \dots\dots + c_{k-1} T^{2(k-1)} x = T(0) = 0$$

ولكن $T^h(x) = 0$ لكل $h \geq k$.

إذن جميع حدود الطرف الأيسر تتلاشى ماعدا الحد $c_0 T^{k-1} x$ فنحصل على:

$$c_0 T^{k-1} x = 0$$

ولكن $T^{k-1} x \neq 0$ (من الفرض). إذن $c_0 = 0$

وبالطريقة نفسها نبرهن $c_1 = 0$ بتطبيق T^{k-2} على طرفي المعادلة أعلاه فنحصل على:

$$c_1 T^{k-1} x = 0$$
$$\Rightarrow c_1 = 0 \qquad \{T^{k-1} x \neq 0\}$$

وهكذا نبرهن أن جميع المعاملات تساوي الصفر. إذن المجموعة B مستقلة خطياً.

إذن: $\{x, Tx, T^2 x, \dots\dots T^{k-1} x\}$ أساس للفضاء الجزئي الدوراني $Z(x, T)$.

يمكن التعبير عن المبرهنة السابقة (2.2.3) بلغة المصفوفات بالنسبة للأساس الدوراني $\{x, Tx, T^2 x, \dots\dots T^{k-1} x\}$ المحدد على الراسم T.

والفضاء الجزئي الدوراني $Z(x, T)$ بمصفوفة بسيطة. أي أنه يمكن أن نكتب:

$$x_1 = x \ , \ \ x_2 = T x, \dots\dots, \ x_k = T^{k-1} x$$

اي أن عمل T على هذه المجموعة بالشكل:

$T x_i = x_{i+1}$ لكل $i = 1, 2, \dots\dots, k-1$ و $T x_k = 0$

باستخدام تعريف مصفوفة الراسم الخطي، وبالنظر إلى مصفوفة الراسم T على الفضاء الجزئي الدوراني $Z(x, T)$ في الأساس $\{x_i\}$ فالمصفوفة تكون على الشكل:

$$\begin{bmatrix} 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & & & . \\ . & 1 & 0 & & . \\ \vdots & & \ddots & \ddots & . \\ 0 & . & . & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

مصفوفة مربعة $k \times k$ من نفس رتبة المصفوفة الدورانية، ونرمز لها بالرمز C_k، وكل عناصر C_k أصفار ماعدا العناصر أسفل القطر مباشرة فتكون 1.

نرمز للراسم T المحدد بالعمل على $Z(x,T)$ بالرمز $T|_z$ وهذا الراسم يكون خامداً على $Z(x,T)$ ودليله لايتجاوز بعد $Z(x,T)$. أي k بحيث $(T|_z)^k = 0$ أي أن T راسم خامد يؤدي إلى أن $T|_z$ كذلك.

ومتعدد الحدود المميز للراسم $T|_z$ هو:

$$\det(C_k - \lambda I_k) = (-1)^k \lambda^k$$

حيث k بُعد $Z(x,T)$، لأنه من مبرهنة كايلي – هاملتون يجب أن يكون $(T|_z)^k = 0$.

مبرهنة (2.2.4):

إذا كان $T \in L(V)$ راسم خامد، فإن V يمكن التعبير عنه كجمع مباشر من الفضاءات الجزئية الدورانية للراسم T (T - cyclicsubspase) أي أنه يوجد متجهات $x_r, \ldots, x_2, x_1$ بحيث:

$$V = Z(x_1,T) \oplus Z(x_2,T) \oplus \ldots\ldots \oplus Z(x_r,T)$$

حيث $Z(x_i,T)$ فضاءات جزئية دروانية.

هذه المبرهنة تبين تجزئة فضاء المتجهات إلى فضاءات جزئية دورانية مرتبط بالراسم الخامد T، علماً أن الحصول على الراسم الخامد ممكن دائماً، فلو كانت T ليس خامدة فإن $D = T - \lambda I$ ستكون خامدة وبالتالي المبرهنة تطبق في كل الإحتمالات.

نتيجة 1:

إذا كان $T \in L(V)$ راسم خامد للدليل k، فإنه يوجد r من الأعداد الصحيحة الموجبة $n_1, n_2, ..., n_r$، والمتجهات $x_1, x_2, ..., x_r$ في فضاء المتجهات V بحيث:

أ- $k = n_1 \geq n_2 \geq \;......\; \geq n_r \quad and \quad n_1 + n_2 + ... + n_r = \dim V$

ب- المتجهات الآتية تكون أساس لفضاء المتجهات V:

$$\begin{array}{l} x_1 \,,\, T\,x_1 \,,.....,\, T^{n_1 - 1}\,x_1 \\ x_2 \,,T\,x_2 \,,.....,\, T^{n_2 - 1}\,x_2 \\ . \\ x_r \,,\, T\,x_r \,,.....,\, T^{n_r - 1}\,x_r \end{array}$$

جـ- $T^{n_1}\,x_1 = T^{n_2}\,x_2 = \;......\; = T^{n_r}\,x_r = 0$

المبرهنة السابقة (2.2.4) بلغة المصفوفات يمكن التعبير عنها كالآتي:

نتيجة 2:

نفرض أن $T \in L(V)$ راسم خامد للدليل k، فإنه يوجد أساس لفضاء المتجهات V تكون فيه مصفوفة الراسم T على الشكل:

$$C = \begin{bmatrix} C_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & C_{n_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & C_{n_r} \end{bmatrix}$$

حيث:

$n_1 + n_2 + ... + n_r = \dim V \quad and \quad k = n_1 \geq n_2 \geq \;......\; \geq n_r$ و C_{n_i} مصفوفات جزئية دورانية.

وبتعبير آخر فإن:

$$C = C_{n_1} \oplus C_{n_2} \oplus \;......\; \oplus C_{n_r}$$

النتيجتان أعلاه تعطيان معلومات قيمة حول طبيعة الأساسات المطلوبة وكيفية تجزئة مصفوفة الإنتقال ورتبة كل منها.

مبرهنة مساعدة (2.2.5)

ليكن $T \in L(V)$ راسم خامد للدليل k و $W \subseteq V$ فضاء جزئي دوراني لـ T بعده k، فإن:

$$\dim\left(T^m W\right) = k - m$$

لكل $m \le k$.

البرهان:

نفرض أن $\{x, Tx, \ldots\ldots, T^{k-1}x\}$ أساس للفضاء الجزئي الدوراني W، والمطلوب إثبات أن الصورة (images) $T^m x, T^{m+1}x, \ldots\ldots, T^{k-1}x$ تكون أساس للفضاء الجزئي $T^m W$.

بما أن أي متجه $y \in W$ يمكن التعبير عنه كالآتي:

$$y = a_0 x + a_1 T x + \ldots\ldots + a_{k-1} T^{k-1} x$$

لاختيار مناسب للأعداد a_i وبالتالي فإن صورة y في $T^m W$ يمكن كتابتها كالآتي:

$$T^m y = a_0 T^m x + a_1 T^{m+1} x + \ldots\ldots + a_{k-1-m} T^{k-1} x$$

لأن: $T^k x = 0$

لذلك المتجهات $T^m x, T^{m+1}x, \ldots\ldots, T^{k-1}x$ تولد $T^m W$.

كذلك نثبت أنها مستقلة خطياً كما يلي:

نفرض أن:

$$C_m T^m x + C_{m+1} T^{m+1} x + \ldots\ldots + C_{k-1} T^{k-1} x = 0$$

بتطبيق T^{k-m-1} على المعادلة السابقة نحصل على:

$$C_m T^{k-1} x = 0$$

ومنها ينتج أن $C_m = 0$ لأن $T^{k-1} x \neq 0$

وبنفس الطريقة نحصل على C_i كلها اصفار. و $T^m W$ تملك أساس يحتوي على $k - m$ من العناصر وبالتالي يكون:

$$\dim T^m W = k - m$$

المبرهنة المساعدة أعلاه تساعدنا في برهان المبرهنة الآتية والتي تعتبر تعميماً للمبرهنة (2.2.4) السابقة.

مبرهنة (2.2.6):

نفرض $T \in L(V)$ أن راسم خامد، ونفرض أن:

$$\begin{aligned} V &= Z(x_1, T) \oplus Z(x_2, T) \oplus \ldots\ldots \oplus Z(x_r, T) \\ &= Z(y_1, T) \oplus Z(y_2, T) \oplus \ldots\ldots \oplus Z(y_s, T) \end{aligned}$$

اثنين من التركيبات للفضاءات الجزئية الدورانية لـ T في فضاء المتجهات V، كما هو موصوف في مبرهنة (2.2.4) فإن $r = s$ و

$$\dim Z(x_i, T) = \dim Z(y_i, T)$$

هذا يعني أن T تحدد بشكل وحيد تحليل V إلى الجمع المباشر للفضاءات الجزئية الدورانية $Z(x_i, T)$. أي أن تحويل أي مصفوفة إلى صورة جوردان القانونية سيكون بشكل وحيد.

البرهان:

نفرض أن V يمكن أن تحلل (تفكك) كجمع مباشر من الفضاءات الجزئية الدورانية لـ T بطريقتين:

$$\begin{aligned} V &= Z(x_1, T) \oplus Z(x_2, T) \oplus \ldots\ldots \oplus Z(x_r, T) \\ &= Z(y_1, T) \oplus Z(y_2, T) \oplus \ldots\ldots \oplus Z(y_s, T) \end{aligned}$$

حيث:

$$\dim\left(Z\left(y_i,T\right)\right)=m_i \quad \text{و} \quad \dim\left(Z\left(x_i,T\right)\right)=n_i$$

ويمكن أن نفرض أن كل الفضاءات الجزئية تكون رتبتها.

$$m_1 \geq m_2 \geq \;......\; \geq m_s \quad \text{و} \quad n_1 \geq n_2 \geq \;......\; \geq n_r$$

سوف نثبت اولاً أن: $r = s$ باستخدام المبرهنة المساعدة (2.2.5) فإن:

$$\dim T\,Z\left(x_1,T\right)=n_1-1\;,......,\;\dim T\,Z\left(x_r,T\right)=n_r-1$$

بما أن:

$$T\,V=T\,Z\left(x_1,T\right)\oplus T\,Z\left(x_2,T\right)\oplus\;.....\;\oplus T\,Z\left(x_r,T\right)$$

إذن:

$$\begin{aligned}\dim T\,V&=\left(n_1-1\right)+\left(n_2-1\right)+\;.......\;+\left(n_r-1\right)\\&=\left(n_1+n_2+.......+n_r\right)-r=n-r \qquad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)\end{aligned}$$

نستخدم الجمع المباشر للتركيبات:

$$V=Z\left(y_1,T\right)\oplus Z\left(y_2,T\right)\oplus\;.....\;\oplus Z\left(y_s,T\right)$$

نحصل على:

$$\dim T\,V=\left(m_1+m_2+\;......\;+m_s\right)-s=n-s \qquad .\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

من (1) و (2) ينتج أن:

$$n-r=n-s \;\Rightarrow\; r=s$$

واثبات أن الأبعاد $n_1=m_1\;,\;n_2=m_2\;,.......,\;n_r=m_s$ بنفس الطريقة السابقة.

إذ لو فرضنا أنه يوجد عدد صحيح i بحيث $n_i \neq m_i$ حيث:

$$n_{i-1}=m_{i-1}\;,.......,\;n_2=m_2\;,\;n_1=m_1$$

ولنأخذ: $m_i < n_i$.

إذن:

$$\dim Z\left(x_j ,T\right) = n_j = m_j \geq m_i$$

عندما: $j \leq i-1$.

وباستخدام المبرهنة المساعدة (2.2.5):

$$\dim T^{m_i} Z\left(x_j ,T\right) = m_j - m_i \quad , \quad j = 1, 2 ,...., i-1$$

بتطبيق T^{m_i} في العلاقة:

$$V = Z\left(x_1 ,T\right) \oplus Z\left(x_2 ,T\right) \oplus \; ..... \; \oplus Z\left(x_r ,T\right)$$

نحصل على :

$$\dim T^{m_i} V \geq \left(m_1 - m_i\right) + \left(m_2 - m_i\right) + \; ...... \; + \left(m_{i-1} - m_i\right) + \left(n_i - m_i\right)$$

من جانب آخر T^{m_j} تتلاشى في $Z\left(y_j ,T\right)$. هذا يعني أن:

$$T^{m_i} Z\left(y_j ,T\right) = \{0\}$$

لكل $j \geq i$.

وبتطبيق T^{m_j} مرة أخرى على:

$$V = Z\left(y_1 ,T\right) \oplus Z\left(y_2 ,T\right) \oplus \; ..... \; \oplus Z\left(y_s ,T\right)$$

نحصل على:

$$\dim T^{m_i} V = \left(m_1 - m_i\right) + \left(m_2 - m_i\right) + \; ...... \; + \left(m_{i-1} - m_i\right)$$

وبوضع هذه العلاقات معاً نحصل على:

$$\begin{gathered} \left(m_1 - m_i\right) + \left(m_2 - m_i\right) + \; ...... \; + \left(m_{i-1} - m_i\right) \geq \\ \left(m_1 - m_i\right) + \; ...... \; + \left(m_{i-1} - m_i\right) + \left(n_i - m_i\right) \\ \Rightarrow n_i \leq m_i \end{gathered}$$

وهذا تناقض.

إذاً: $n_i = m_i$.

مبرهنة (2.2.7) (Fitting's Theorem)

إذا كان $T \in L(V)$، فإنه يوجد فضائين جزئيين W_1 و W_2 في V بحيث:

أ- $V = W_1 \oplus W_2$

ب- W_1 و W_2 كلاهما غير متغير تحت تأثير T (T-invariant).

جـ- الراسم $T|_{W_1}$ يكون خامد nilpotent ، و $T|_{W_2}$ قابل للعكس.

W_1 و W_2 في هذه المبرهنة سيكونان $\ker T^k$ و $T^k V$ لاختيار مناسب للعدد الصحيح k، وباستخدام المبرهنة (1.2.4) استناداً إلى هذا نحصل على:

نتيجة 1:

إذا كان الراسم $T \in L(V)$ فإن:

$$V = \ker T^k \oplus T^k V$$

لبعض الأعداد الصحيحة k.

لمزيد من المعلومات أنظر [4].

نتيجة 2:

نفرض أن $f(x)$ متعدد حدود مميز للراسم الخطي T حيث $T \in L(V)$ وأن $f(x) = f_1(x)\, f_2(x)$ حيث f_1 و f_2 أولية معاً (relatively prime) أي $[(f_1(x)\ ,\ f_1(x)) = 1]$ إذا كانت k_i نواة لـ $f_i(T)$ و E_i فضاء الصور لـ $f_i(T)$ (images space) فإن:

1. $K_1 \cap K_2 = 0$.
2. $E_1 \oplus E_2 = V$.
3. $K_1 = E_2$ و $K_2 = E_1$.

4. K_i و (E_i) كليهما فضاء جزئي غير متغير تحت تأثير T أي أن $T(K_i) \subseteq K_i$.
5. إذا كان T_i هو T محدد على K_i، فإن متعددة الحدود المميزة لـ T_i هو $f_i(x)$ حيث $i = 1 , 2$ وأنه باختيار مناسب للاساس فإن مصفوفة الراسم T تكون الجمع المباشر للمصفوفات T_1 و T_2.

النتيجتان أعلاه تعطيان معلومات وافية حول تجزئة الفضاء V إلى جمع مباشر لجزئين اساسيين مع تحديد مواصفات هذه الجزئين.

لمزيد من المعلومات أنظر [10].

ندرج الآن المبرهنة الآتية التي تبين عدد الفضاءات الجزئية وأبعاد أساساتها وشكل مصفوفة جوردان القانونية.

مبرهنة (2.2.8):

إذا كانت القيم الذاتية المختلفة $\lambda_1, \lambda_2, ...,\lambda_r$ للراسم الخطي $T \in L(V)$ تنتمي إلى الحقل F، وكان $m(\lambda_i)$ التكرار الجبري (algebraic multiplicity) للقيم الذاتية λ_i، فإنه يوجد فضاءات جزئية غير متغيرة تحت تأثير T، $W_1, W_2, ..., W_r$ في فضاء المتجهات V بحيث:

أ- $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \; ...... \; \oplus W_r$.

ب- $\dim W_i = m(\lambda_i)$.

جـ- التحديد $T|_{W_i}$ يكون بالصيغة $T|_{W_i} = \lambda_i I + N_i$ حيث N_i خامدة (nilpotent).

البرهان:

نعتبر الراسم الخطي $T_1 \in L(V)$ المعرف بواسطة $T_1 = T - \lambda_1 I$ من المبرهنة السابقة (2.2.7) V يمكن التعبير عنه كجمع مباشر $V = W_1 \oplus U_1$ من الفضاءات الجزئية غير المتغيرة تحت تأثير T_1 بحيث T_1 يكون راسم خامد على W_1 وقابلة للعكس على U_1 لأن W_1 و U_1 كلاهما غير متغير تحت تأثير T_1 وبالتالي فإن كل منهما غير متغير تحت تأثير T حيث $T = T_1 - \lambda_1 I$ وبالتالي فإن التحديد:

$$T|_{W_1} = (T_1 + \lambda_1 I)|_{W_1} = T_1|_{W_1} + \lambda_1 I$$

وهذه هي الصيغة (جـ) في المبرهنة أعلاه لأن $T|_{W_1}$ خامد وبالإستناد على النتيجة 2 من مبرهنة (2.2.7) فإن:

$$\dim W_1 = m(\lambda_1)$$

إذن يوجد أساس لـ V بحيث تكون مصفوفة الراسم T على الشكل:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

حيث A_1 تمثل عمل الراسم T_1 على W_1 و A_2 تمثل عمل الراسم T_2 على U_1.
ومنه ينتج لأي عدد λ نحصل على:

$$\det(A - \lambda I) = \det(A_1 - \lambda I)\ \det(A_2 - \lambda I)$$

حيث المصفوفة $A_2 - \lambda I$ تمثل عمل $T_1 = T - \lambda I$ على U_1. وبما أن T_1 قابلة للعكس على U_1. إذن:

$$\det(A_2 - \lambda_1 I) \neq 0$$

وبالنتيجة $\lambda - \lambda_1$ ليس عاملاً لـ $\det(A_2 - \lambda_1 I)$، كذلك $(\lambda - \lambda_1)^{m(\lambda_1)}$ يجب أن تقسم $\det(A_1 - \lambda I)$.

بما أن $\det(A_1 - \lambda I)$ هو متعدد الحدود من الدرجة $\dim W_1$ إذن:

$$\dim W_1 \geq m(\lambda_1)$$

من جانب آخر T_1 يكون خامد على W_1 ولهذا من المبرهنة (2.2.4) يمكن التعبير عن T_1 بواسطة مصفوفة فيها العناصر أسفل القطر مباشرة واحد أوصفر والبقية أصفار.

هذا يعني أن الراسم $T|_{W_1} = T_1|_{W_1} + \lambda_1 I$ يمكن وصفه بواسطة المصفوفة التي على القطر λ_1 وأسفل القطر واحد أو صفر وبقية العناصر اصفار.

إذن: $\det(A_1 - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)^{\dim W_1}$.

إذن: $\dim W_1 \leq m(\lambda_1)$.

بما أن:

$$(\lambda-\lambda_1)^{m(\lambda_1)} / \det(A_1-\lambda I)$$

إذن:

$$\dim(W_1)=m(\lambda_1)$$

وبعد ذلك نعتبر الراسم $T|_{U_1} \in L(U_1)$ ونستخدم $T_2=(T-\lambda_2 I)|_{U_1}$ ونوجد الفضاءات الجزئية غير المتغيرة تحت تأثير T وهي W_1 و U_2 بحيث:

$$U_1=W_1 \oplus U_2$$

وبما أن V بعده منته، إذن نحتاج إلى عدد منته من الخطوات للوصول إلى تحليل V.

النتيجتان الآتيتان تحددان شكل صيغة جوردان القانونية بالإستناد على متعدد الحدود المميز.

نتيجة 1:

إذا كان الراسم الخطي $T \in L(V)$ له متعدد الحدود المميز:

$$f(x)=P_1^{a_1}(x)\ P_2^{a_2}(x)\ ......\ P_k^{a_k}(x)$$

حيث $P_i(x)$ متعددات حدود مختلفة وغير قابلة للإختزال (irreducible) على الحقل F . فإن:

$$V=E_1 \oplus E_2 \oplus\ .....\ \oplus E_k$$

حيث E_i نواة $P_i^{a_i}(T)$ ، E_i غير متغيرة تحت تأثير T، وإذا كانت T_i هي T محددة على E_i فإن متعدد الحدود المميز لـ T_i هو $P_i^{a_i}(x)$ ، وباختيار مناسب لهذا الأساس تكون مصفوفة T الجمع المباشر للمصفوفات T_i.

لمزيد من المعلومات أنظر [10].

نتيجة 2:

نفرض أن للراسم $T \in L(V)$ القيم الذاتية المختلفة λ_i في الحقل F وكل قيمة لها تكرار جبري $m(\lambda_i)$, $(i = 1, 2, ..., r)$ فإنه يوجد أساس لفضاء المتجهات V تكون فيه مصفوفة T بالشكل:

$$J = A_1 \oplus A_2 \oplus \,........\, \oplus A_r$$

حيث A_i مصفوفة مربعة رتبتها $m(\lambda_i)$، و λ_i على القطر وصفر وواحد أسفل القطر مباشرة وبقية العناصر أصفار.

أي أن:

$$A_i = J_{i1}(\lambda_i) \oplus J_{i2}(\lambda_i) \oplus \,........\, \oplus J_{ik_i}(\lambda_i) \quad , \quad i = 1, 2, ..., r$$

حيث $J_{ij}(\lambda_i)$ مصفوفات جوردان الأساسية نسبة إلى λ_i.

البرهان:

نبدأ البرهان باستخدام المبرهنة السابقة (2.2.4) أي أن فضاء المتجهات V يمكن التعبير عنه كجمع مباشر من الفضاءات الجزئية W_i , $i = 1, 2, ..., r$ أي أن:

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \,........\, \oplus W_r$$

والراسم $T - \lambda_i I$ يكون راسم خامد على W_i، ومن نتائج مبرهنة (2.2.4) يوجد اساس للفضاء الجزئي W_i بحيث B_i مصفوفة الراسم $T - \lambda_i I$ على الفضاء الجزئي W_i تأخذ الشكل الآتي:

$$B_i = \begin{bmatrix} C_{n_{i1}} & & & \\ & C_{n_{i2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{n_{ik_i}} \end{bmatrix}$$

حيث $C_{n_{ij}}$ مصفوفات جزئية دورانية، أي أن كل العناصر التي تقع تحت القطر مباشرة تكون 1 وبقية العناصر أصفار.

إذا كانت المصفوفة A_i تحدد عمل الراسم T على الفضاء الجزئي W_i بالنسبة لنفس الأساس فإن:

$$B_i = A_i - \lambda_i I \Rightarrow A_i = \lambda_i I + B_i = \begin{bmatrix} J_{i1}(\lambda_i) & & & \\ & J_{i2}(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{ik_i}(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

ولنأخذ أساس للفضاء V يتكون من أساسات الفضاءات الجزئية W_i في هذا الأساس تكون مصفوفة الراسم T على الشكل:

$$J = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{bmatrix}$$

الخلاصة:

فيما يلي نوجز ماسبق من معلومات لتحويل أي مصفوفة مربعة A من الرتبة n x n إلى صيغة جوردان القانونية.

نفرض أن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ الجذور الذاتية لمتعدد الحدود المميز لمصفوفة الراسم الخطي T على فضاء المتجهات V، حيث λ_i ليست جميعها مختلفة ولايوجد n من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً والمرتبطة بالجذور الذاتية أعلاه.

مثلاً: إذا كانت لدينا متعدد الحدود المميز لـ A:

$$\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} (\lambda - \lambda_3)^{n_3} \ldots\ldots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}$$

حيث: $n = n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_r$

فباستخدام مبرهنة (2.1.3) فإن A تشابه مصفوفة من النوع:

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_r \end{bmatrix}$$

حيث أن B_i مصفوفات جزئية نسبة إلى $(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$ وتكون من الرتبة n_i وبالشكل:

$$B_i = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_h \end{bmatrix}$$

حيث J_i مصفوفات جوردان الجزئية.

عدد ومن الرتبة مصفوفات جوردان الجزئية يحدد لكل B_i حسب مبرهنة (2.1.6) من العلاقة:

$$r\left(D^{i-1}\right) - 2\, r\left(D^{i}\right) + r\left(D^{i+1}\right)$$

حيث $D = T - \lambda_i I$ و $D^0 = I$.

فنحصل على تجزئة B_i إلى مصفوفات جوردان الجزئية، وبالتالي نحصل على صورة جوردان القانونية المشابهة للمصفوفة A بصورتها النهائية.

بقى أن نوجد P بحيث $P^{-1} A P$ تكون بصفة جوردان القانونية النهائية التي حددناها في الخطوات السابقة أعلاه.

ولإيجاد مصفوفة الإنتقال P، نفرض أن دليل الراسم الخامد T_i هو m أي أن $T_i^m = 0$.

حيث:

$$T_i = T - \lambda_i I \quad \text{(مبرهنة 2.1.5)}$$

الآن نختار متجه $x \in W$ بحيث:

$$T^{m-1} x \neq 0$$

ثم نحسب $T^i x$ و $1 \leq i \leq m-1$ ومنه نحصل على:

$$\left\{ x, Tx, T^2 x, \ldots\ldots., T^{m-1} x \right\}$$

الذي يكون أساس للفضاء الجزئي الدوراني المتولد بواسطة x والذي يكون أساس للمصفوفة الجزئية B_i (مبرهنة 2.2.2).

نجمع الفضاءات الجزئية الدورانية جمع مباشر نحصل على فضاء المتجهات V (مبرهنة 2.2.4)

وبتجميع هذه الأساسات (وضعها كأعمدة) نكوّن المصفوفة P، وهي مصفوفة الإنتقال لمصفوفة جوردان القانونية. نحسب $P^{-1}AP$ فتكون في صيغة جوردان القانوينة التي سبق تحديدها بالجزء الأول.

2.3 خوارزمية التحويل إلى صيغة جوردان القانونية:

الآن نعيد صياغة المعلومات السابقة بصيغة خوارزمية مكتفية ذاتياً، ويمكن استخدامها من قبل الباحثين في المجالات المختلفة بدون الحاجة إلى مراجعة المعلومات الواردة في هذه الرسالة.

معطى A مصفوفة مربعة من الرتبة n على $\mathfrak{R}$.

خوارزمية التحويل تنقسم إلى جزئين:

(I) تحديد شكل مصوفة جوردان القانونية المشابهة للمصفوفة المعطاة A.

(II) تحديد مصفوفة الإنتقال P بحيث $P^{-1}AP$ مصفوفة جوردان القانونية والمحددة في (I).

أولا: بالنسبة إلى (I) نقوم بالخطوات الآتية:

1. تحديد متعددة الحدود المميزة للمصفوفة A وليكن:

$$\phi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\ (\lambda-\lambda_2)^{n_2}\ (\lambda-\lambda_3)^{n_3}\ldots\ldots\ (\lambda-\lambda_r)^{n_r}$$

2. نحدد $D_i=A-\lambda_i I$ لكل $i=1,2,\ldots\ldots,r$ ونحسب مرتبة D_i, D_i^2, ... إلى أن تستقر (أي تعطي القيمة ذاتها كل مرة).

3. لكل D_i نقوم بمايلي:

نحدد عدد ورتبة مصفوفات جوردان الجزئية من الرتبة j من العلاقة:

$$r\left(D^{j-1}\right)-2\,r\left(D^{j}\right)+r\left(D^{j+1}\right)$$

فنحصل على عدد ورتبة مصفوفات جوردان الجزئية المرتبطة بـ D_i. وبالتالي نحصل على المصفوفة الجزئية B_i في مصفوفة جوردان القانونية.

4. تحديد مصفوفة جوردان القانونية المشابهة للمصفوفة A بالجمع المباشر للمصفوفات الجزئية B_i.

ثانياً: بالنسبة إلى (II) نقوم بمايلي:

1. إذا كان $n_i = 1$ نوجد المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية λ_i من المعادلة $(A - \lambda_i\, I)\, x = 0$ حيث سيكون أساس المصفوفة الجزئية B_i (أي عمود في مصفوفة الإنتقال P).

2. أما إذا كان $n_i > 1$ فنقوم بالخطوات الآتية:

أ- نضع $T_i = A - \lambda_i\, I$.

ب- نختار المتجه e_j في $\{e_1 , e_2 ,......, e_n\}$ بحيث:

$$T^{n_i - 1}\left(e_j\right) \neq 0$$

جـ- نحدد:

$$H = \left\{e_j \, , \, T_i\left(e_j\right) ,........, \, T_i^{n_i - 1}\left(e_j\right)\right\}$$

الذي سيكون أساس المصفوفة الجزئية B_i (أي أعمدة مصفوفة الإنتقال لهذه المصفوفة الجزئية).

د- نعيد ذات الخطوات السابقة (أ ، ب ، جـ) لحساب أساس المصفوفة الجزئية B_{i+1} ولكن المتجه الذي نختاره في الفقرة أ من (2) يكون مستقل خطياً مع عناصر المجموعة H.

هـ- نكرر الخطوات في (2) لكل B_j.

و- نكوّن مصفوفة الإنتقال P من متجهات الأساس أعلاه (أي أن هذه الأساسات تكوّن أعمدة P).

ز- نحسب P^{-1} ثم $P^{-1} A P$ فتكون في صيغة جوردان القانونية المذكورة في (I) أعلاه.

نورد الآن بعض الأمثلة التطبيقية على خورازمية التحويل إلى صيغة جوردان القانونية.

مثال 1:

عين مصفوفة جوردان القانونية للمصفوفة A حيث A مصفوفة الراسم الخطي T على فضاء المتجهات $V(4, \Re)$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

الحل: نطبق خطوات الخوارزمية:

أولاً:

1. $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow (-\lambda - 2)^{n_1} (-\lambda - 4)^{n_2} (\lambda - 2)^{n_3} = 0$
$\Rightarrow (-\lambda - 2)(-\lambda - 4)(\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = -4 \ , \ \lambda_2 = -2 \ , \ \lambda_1 = 2$

2. نحسب D حيث: $D = A - \lambda_1 I \Leftarrow D = A - 2I$.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \ , \quad D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 36 \end{bmatrix}$$

$$r(D) = 3 \ , \ r(D^2) = 2 \ , \ r(D^3) = 2 \ , \ r(D^0) = 4$$

(لاحظ هنا أن $r(D^j) = 2$ لكل $j \geq 3$. أي تستقر).

3. نحدد عدد مصفوفات جوردان الجزئية من الرتبة j من العلاقة:

$$r(D^{j-1}) - 2\,r(D^j) + r(D^{j+1})$$

I. عدد مصفوفات جوردان الجزئية من الرتبة 1 = 0.

II. عدد مصفوفات جوردان الجزئية من الرتبة 2 = 1.

إذاً:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

B_1 إحدى المصفوفات الجزئية في مصفوفة جوردان القانونية. أما B_2 و B_3 المرتبطان بالقيم الذاتية $\lambda_2 = -2$ و $\lambda_3 = -4$ المختلفة وغير المتكررة على الشكل $B_2 = [-2]$ و $B_3 = [-4]$.

4. نجمع المصفوفات الجزئية B_1 و B_2 و B_3 جمعاً مباشراً فنحصل على مصفوفة جوردان القانونية المشابهة لـ A وهي:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

ثانياً: تحديد مصفوفة الإنتقال P:

1. (I) نوجد المتجه الذاتي المناظر لـ $\lambda_2 = -2$ من المعادلة:

$$(A - \lambda_2 I)\, x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (x_1 , x_2 , x_3 , x_4)^T = (0 , 0 , 1 , 0)^T = V_1$$

(II) كذلك المتجه الذاتي المناظر لـ $\lambda_3 = -4$ يكون:

$$(x_1 , x_2 , x_3 , x_4)^T = (0 , 0 , 0 , 1)^T = V_2$$

2. بما أن λ_1 مكررة مرتين إذاً:

أ- نضع $T_1 = A - \lambda_1 I$ ، إذاً:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

ب- نختار المتجه $e_2 = (0\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0)$ بحيث $T_1(e_2) \neq 0$.

جـ- $T_1\left(e_2\right) = (-1\ ,\ -1\ ,\ 0\ ,\ 0) = -e_1 - e_2$ و $e_2 = (0\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0)$.

إذاً :

$\{e_2\ ,\ T_1 e_2\}$ أساس المصفوفة الجزئية B_1.

هـ- واضح أن $\{T_1\left(e_2\right)\ ,\ e_2\ ,\ v_2\ ,\ v_1\}$ تكون مجموعة مستقلة خطياً.

و- نكوّن مصفوفة الإنتقال من أعمدة الأساس في (هـ). إذاً:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ز-

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وأخيراً نحسب:

$$P^{-1} A P = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

وهي صيغة جوردان القانونية المذكورة في الجزء الأول.

مثال 2:

ليكن T راسم خطي على $V\left(5,\Re\right)$ الممثل بالمصفوفة (نسبة إلى الأساس القياسي):

$$T=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&-1\end{bmatrix}$$

الحل:

أولاً: لتحديد شكل مصفوفة جوردان القانونية المشابهة لـ T:

1. $\phi\left(\lambda\right)=-\lambda^5=0 \;\Rightarrow\; \lambda^5=0$

إذن الجذر الذاتي الوحيد إلى $\phi\left(\lambda\right)$ هو $\lambda=0$.

2. نضع $D=T-\lambda\,I=T$، ثم نحسب:

$$r\left(D\right)=3\;\;,\;\;r\left(D^2\right)=1\;\;,\;\;r\left(D^3\right)=0\,,\;\;r\left(D^0\right)=5$$

3. نحدد عدد ومن الرتبة مصفوفات جوردان الجزئية من العلاقة:

$$r\left(D^{j-1}\right)-2\,r\left(D^{j}\right)+r\left(D^{j+1}\right)$$

I. عدد مصفوفات جوردان الجزئية من الرتبة 1 = 0.

II. عدد مصفوفات جوردان الجزئية من الرتبة 2 = 1.

III. عدد مصفوفات جوردان الجزئية من الرتبة 3 = 1.

4. مصفوفة جوردان القانوينة المشابهة لـ T تكون على الشكل:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

ثانياً: تحديد مصفوفة الإنتقال P:

واضح أن: λ مكررة 5 مرات، إذاً نقوم بمايلي:

أ- نضع $T_1 = T - \lambda I = T$.

ب- نختار المتجه $e_3 = (0\,,\,0\,,\,1\,,\,0\,,\,0)$ بحيث $T^2(e_3) \neq 0$.

جـ- نحدد e_3 و $T(e_3)$ و $T^2(e_3)$، أي أن:

$$e_3 = (0\,,\,0\,,\,1\,,\,0\,,\,0) \quad \text{و} \quad T(e_3) = (0\,,\,1\,,\,0\,,\,0\,,\,0) = e_2$$

$$T^2(e_3) = (0\,,\,1\,,\,0\,,\,0\,,\,1) = e_2 + e_5$$

إذاً:

$$H_1 = \{e_3\,,\,e_2\,,\,e_2 + e_5\}$$

الآن نختار متجهاً آخر وليكن $e_4 = (0\,,\,0\,,\,0\,,\,1\,,\,0)$ بحيث يكون e_4 مستقل عن المتجهات في H_1. إذاً:

$$T(e_4) = (1\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0) = e_1$$

إذاً:

$$H_2 = \{e_4\,,\,e_1\}$$

واضح أن المتجهات في H_1 و H_2 مستقلة خطياً.

و- نكون مصفوفة الإنتقال P من المتجهات في H_1 و H_2 (وضعها كأعمدة).

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ز – نحسب P^{-1} ثم $P^{-1}\,T\,P$.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}\,T\,P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

وهي صيغة جوردان القانونية للمصفوفة T المذكورة في الجزء الأول من الحل.

في المثال الآتي رغم أن المصفوفة معرفة على الأعداد المركبة **C** إلا أن القيم الذاتية في $\mathfrak{R}$ لذلك يمكن استخدام الخوارزمية لإيجاد الصورة القانونية كما هو موضح في أدناه:

مثال 3:

عين صيغة جوردان القانونية للمصفوفة A حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \\ 2i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نحدد متعددة الحدور المميزة لـ A:

$$\det\left(A-\lambda I\right)=0$$
$$\Rightarrow\left(\lambda^2-4\right)\left(\lambda^2-4\right)=0 \Rightarrow \lambda_1=-2 \;,\; \lambda_2=2$$

وبتطبيق بقية الخطوات نحصل على مصفوفة الإنتقال P. إذاً:

$$P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & i & 0 & i\\ i & 0 & -i & 0\end{bmatrix}$$

ومنها:

$$P^{-1}AP=\left[\begin{array}{cc|cc}2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right]$$

وهي مصفوفة جوردان القانونية للمصفوفة A.

الفصل الثالث

التحويل إلى الصيغة القياسية القانونية

Transition to Rational Canonical form

معروف أنه لو كانت $\theta : F \to M$ تشاكل شامل (epimorphism) من الموديول الحر F إلى الموديول M فإن $\ker \theta = N$ تكون موديول جزئي في F، وباستخدام مبرهنة التشاكل التقابلي (isomorphism theorem) بين الموديولات فإن ذلك يؤدي إلى أن M تكون متشاكلة تقابلياً مع موديول القسمة F/N لذلك بامكاننا الحصول على المعلومات حول M من خلال دراسة F/N. وهذا ماسنقوم به في هذا الفصل.

3.1 تحديد مصفوفة العوامل غير المتغيرة:

تعريف (3.1.1):

أي عنصر m في الموديول M المعرف على الحلقة R ذات العنصر المحايد يسمى عنصر ملوي (torsion element) إذا وجد $r \in R$ و $r \neq 0$ بحيث $r\,m = 0$.

وإذا كانت كل عناصر M ملوية فإنه يسمى موديول ملوي، أما إذا كان M لايحتوي على أي عنصر ملوئ (باستثناء الصفر) فإنه يسمى موديول لاملوي (torsion-free module).

واضح أن الصفر عنصر ملوي، وأن أي عنصر $m \neq 0$ يكون لاملوي إذا كان:

$$r\,m = 0 \;\Rightarrow\; r = 0$$

تعريف (3.1.2):

ليكن M موديول معرف على R و X مجموعة جزئية من M فنقول أن X تولد M بشكل حر (freely generators) إذا:

(I) X تولد M.

(II) أي دالة من X إلى الموديول N المعرف على R تُوسّع إلى تشاكل من M إلى N ، أي إذا أعطينا أي موديول N معرف على R، ودالة $\phi : X \to N$ فيوجد تشاكل $\psi : M \to N$ بحيث $\psi(x) = \phi(x)$ لكل $x \in X$.

M أعلاه تسمى موديول حر، والمجموعة الجزئية X تسمى أساس M.

V كموديول على $K[x]$ (3.1.3):

بما أن أي حقل هو حلقة ذات عنصر محايد فإن أي فضاء متجهات V معرف على الحقل K يمكن اعتباره موديول معرف على K، وإذا عرفنا رواسم خطية على V فإن V يكون موديول معرف على $K[x]$ كما هو موضح أدناه.

نفترض أن α و β راسمان خطيان على V ، $k \in K$ فيمكن أن نعرف $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ و $(k\alpha) : V \to V$ كالآتي:

$$(\alpha + \beta)(v) = \alpha(v) + \beta(v)$$
$$(\alpha\beta)(v) = \alpha(\beta(v))$$
$$(k\alpha)(v) = k(\alpha(v))$$

حيث v أي متجه في V.

الدوال الموصوفة أعلاه تمثل رواسم خطية على V، وبالتالي فهي تنتمي إلى مجموعة التحويلات الخطية $L(V)$، وإذا كانت $\alpha \in L(V)$ و I الراسم المحايد لـ $L(V)$ وكانت:

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in K[x]$$

فإن:

$$f(\alpha) = a_0 I + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \dots\dots + a_n \alpha^n \in L(V)$$

وتأثيره على أي متجه $v \in V$ كما يأتي:

$$f(\alpha)(v) = a_0 v + a_1 \alpha(v) + a_2 \alpha^2(v) + \dots\dots + a_n \alpha^n(v)$$

فالدالة:

$$h : K[x] \times V \to V$$

المعرفة بالشكل:

$$h(f, v) = f(\alpha)(v)$$

حيث $f \in K[x]$ و $v \in V$

تجعل من V موديول معرف على $K[x]$ من خلال تحقيق كافة شروط الموديول. وإذا رمزنا للدالة $h(f, v)$ بالرمز $f v$ فإن:

$$f(v_1 + v_2) = f v_1 + f v_2$$
$$(f + g) v = f v + g v$$
$$(f g) v = f (g v)$$

كذلك بقية الشروط.

لاحظ أننا استخدمنا الراسم α على V. وإذا استخدمنا راسماً آخر فسنحصل على موديول آخر.

والموديول الجزئي على $K[x]$ في V هو بالضبط الفضاء الجزئي من V غير المتغير تحت تأثير α، وكذلك فإن V كجمع مباشر من الموديولات الجزئية على $K[x]$ هو V كجمع مباشر للفضاءات الجزئية غير المتغيرة تحت تأثير α.

مبرهنة (3.1.4):

نفرض أن R ساحة أساسية (P I D) و F موديول حر على R ذو بعد منته S و N موديول جزئي من F، فإنه يوجد أساس $\{f_1, f_2, \ldots\ldots, f_s\}$ للموديول F وعناصر $d_1, d_2, \ldots, d_s$ في R بحيث:

(I) العناصر غير الصفرية في المجموعة $\{d_1 f_1, d_2 f_2, \ldots\ldots, d_s f_s\}$ تكون اساساً لـ N.

(II) $d_1 \mid d_2 \mid \ldots \mid d_s$.

من المعروف أنه إذا كانت U فضاء جزئي من فضاء المتجهات V الذي بعده منته على الحقل K، فإن أي أساس $\{f_1 , f_2 ,\dots\dots, f_t\}$ إلى U يمكن توسيعه (تمديده) إلى الأساس $\{f_1 , f_2 ,\dots, f_t , f_{t+1} ,\dots, f_s\}$ لفضاء المتجهات V.

الآن لو ابتدأنا من أساس V $\{f_1 , f_2 ,\dots, f_t , f_{t+1} ,\dots, f_s\}$ فإنه نسبة إلى المبرهنة السابقة، سيكون:

$$d_1 = d_2 = \dots\dots\dots = d_t = 1 \quad و \quad d_{t+1} = d_{t+2} = \dots\dots = d_s = 0$$

بحيث:

$$\{d_1 f_1 , d_2 f_2 ,\dots\dots, d_s f_s\}$$

تكون أساس لـ N.

لو افترضنا أن F موديول حر يتولد بشكل منتـه بـ S من العناصر فإن أي أساس لـ F يحتوي على s من العناصر وإذا كانت $f^* = \{f_1^*, f_2^* ,\dots\dots, f_s^*\}$ مجموعة من s من العناصر فإن:

$$f_i^* = \sum_{i,j=1}^{s} a_{ji}\, f_j$$

حيث:

$f = \{f_1 , f_2 ,\dots\dots, f_s\}$ أساس F.

لتكن $A = (a_{kl})$ المصفوفة من الرتبة s على R أعلاه، بما أن F موديول حر، إذاً توجد α تشاكل داخلي (Endomorphism) على F وتكون وحيدة معرفة بواسطة $\alpha(f_i) = f_i^*$ لكل $i = 1 , 2 ,\dots\dots, s$ ومن المعادلة السابقة تكون مصفوفة α بالنسبة للأساس f هي A.

باستخدام الرموز أعلاه ندرج المبرهنة المساعدة الآتية:

مبرهنة مساعدة (3.1.5):

العبارات الآتية متكافئة:

1. f^* أساس للموديول الحر F.

2. α تشاكل تقابلي على F (automorphism).

3. A قابلة للعكس.

مبرهنة (3.1.6):

أي مصفوفة من الرتبة s على الساحة الأساسية R (P I D) تكافئ على R المصفوفة $D = \text{diag}\left(d_1\,,\, d_2\,,\ldots\ldots,\, d_s\right)$ بحيث:

$$d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_s$$

هذه المبرهنة تعني أنه عندما نبدأ مع أي مصفوفة مربعة A على R، فإنه بالإمكان تحويلها إلى مصفوفة قطرية D عناصر قطرها تحقق الصفة المذكورة في المبرهنة أعلاه ولكن باستخدام مصفوفتين x و y.

تعريف (3.1.7):

نفرض أن A مصفوفة من الرتبة s على الحلقة R وأن $D = \text{diag}\left(d_1\,,\, d_2\,,\ldots\ldots,\, d_s\right)$ مصفوفة قطرية تكافئ A على R بحيث $d_1 \mid d_2 \mid \ldots \mid d_s$ فإن المتتالية $d_1\,,\, d_2\,,\ldots,\, d_s$ تسمى متتالية العوامل غير المتغيرة (sequence of invariant factors) لـ A على R، والمصفوفة القطرية D تسمى مصفوفة العوامل غير المتغيرة لـ A.

للمزيدمن المعلومات أنظر [6].

3.2 تحديد مصفوفة الأنتقال إلى الصيغة القياسية القانونية:

تعريف (3.2.1):

الراسم الخطي α على فضاء المتجهات V يسمى راسم دائري من الرتبة f إذا كان V كموديول على $K[x]$ دائري من الرتبة f. أي أنه إذا كان v عنصراً مولداً لـ V فإن $fv = 0$ نسبة إلى α.

مبرهنة مساعدة (3.2.2):

نفرض أن $\alpha \in L(V)$، فإن α تكون راسم خطي دائري إذا فقط إذا وجد $v \in V$ بحيث تكون العناصر $v, \alpha(v), \alpha^2(v), \ldots\ldots$ مولدة لفضاء المتجهات V الذي بعده منته.

في هذه الحالة v تولد V كموديول على $K[x]$ ورتبة α هي رتبة متعددة الحدود الصغري (minimum) لـ α.

البرهان:

نفرض أن العناصر $v, \alpha(v), \alpha^2(v), \ldots\ldots$ تولد V أي أن أي عنصر في فضاء المتجهات V يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية من مجموعة منتهية من هذه العناصر.

ليكن $u \in V$ إذن توجد:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_r \in R$$

بحيث:

$$u = a_0 v + a_1 \alpha(v) + a_2 \alpha^2(v) + \ \ldots\ldots \ + a_r \alpha^r(v)$$

وهذا ينتج أن:

$$u = g\, v \quad \text{حيث:}$$

$$g = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ \ldots\ldots \ + a_r x^r \ \in K[x]$$

أي أن $V = K[x]\, v$ كموديول معرف على $K[x]$ يتولد بواسطة v.

عكسياً:

إذا كانت $V = K[x]\, v$ فإن لكل $u \in V$ يوجد:

$$g = a_0 + a_1 x + \ \ldots\ldots \ + a_r x^r$$

بحيث $u = g\, v$ أي:

$$u = g\, v = a_0 v + a_1 \alpha(v) + a_2 \alpha^2(v) + \ \ldots\ldots \ + a_r \alpha^r(v)$$

إذن العناصر $v , \alpha(v) , \alpha^2(v) ,......$ تولد فضاء المتجهات V.

مثال:

ليكن V_1 فضاء متجهات بعده 1 على الحقل Q أساسه $\{v_1\}$، ونفرض أن α_1 الراسم الخطي الوحيد على V_1 المعرف بالشكل $v_1 \to -v_1$ ، V_1 يكون موديول دائري على $Q[x]$ عن طريق α_1 متولد بواسطة v_1 لأن v_1 يولد V_1.

ورتبة V_1 هي $x+1$ لأنه:

$$(x+1)\, v_1 = (\alpha_1 + I)\, v_1 = \alpha_1\,(v_1) + v_1 = -v_1 + v_1 = 0$$

وواضح أنه لايوجد متعدد حدود غير صفري درجته أقل من $x+1$ ويرسل v_1 إلى الصفر.

نفـرض أن V_2 فضاء متجهات بعده 2 على Q أساسه $\{v_2 , v_3\}$ ونفـرض أن α_2 راسم خطي على V_2 التي مصفوفته بالنسبة للأساس $\{v_2 , v_3\}$ هي:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

أي:

$$\alpha_2\,(v_2) = 2\, v_2 + v_3$$
$$\alpha_2\,(v_3) = 2\, v_3$$

بما أن v_2 و $\alpha_2\,(v_2)$ مستقلان خطياً على Q. إذاً يولدان V_2، وبالتالي V_2 موديول دائري على $Q[x]$ متولد بواسطة v_2 عن طريق α_2.

نلاحظ أن:

$$(\alpha_2 - 2I)\, v_3 = 0 \quad \text{وأن} \quad (\alpha_2 - 2I)\, v_2 = v_3$$

أي: $(x-2)^2\, v_2 = 0$

بما أن $\min \alpha_2$ يقسم $(x-2)^2$ و $\alpha_2 - 2I \neq 0$.

إذن: $\min \alpha_2 = (x-2)^2$ وهي رتبة V_2.

إذاً $V = V_1 \oplus V_2$ يتولـد بـــواسطة $S = \{v_1 , v_2 , v_3\}$ ونفـرض أن $\alpha = \alpha_1 \oplus \alpha_2$ فتكون مصفوفته بالنسبة للأساس s هي:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

V يكون مـوديول على $Q[x]$ عن طـريق α و V_1 مـوديول جـزئي دائري رتبته $x+1$ متولد بواسطة v_1 و V_2 موديول جزئي دائري رتبتـه $(x-2)^2$ متولـد بواسـطة v_2، وبما أن $(x+1)$ و $(x-2)^2$ أولية معاً (relatively prime) هـذا ينتـج أن V هـو بنفسـه دائري رتبته $(x-2)^2 (x+1)$ متولد بواسطة $v = v_1 + v_2$ هذا يؤدي إلـى أن v و $\alpha(v)$ و $\alpha^2(v)$ تولد V.

المبرهنة المساعدة الآتية تبين لنا طريقة تكوين أساس الموديول الجزئي والذي منـه نكـوّن مصفوفة الإنتقال إلى الصيغة القياسية القانونية.

مبرهنة مساعدة (3.2.3):

لتكن α راسم خطي على V ودائرية مـن رتبـة f، و $m = \deg f$ درجـة f و v تولـد V كموديول على $K[x]$ عن طريق α.

فإن العناصر $v , \alpha(v) , \alpha^2(v) ,\ldots\ldots, \alpha^{m-1}(v)$ تكون أساساً لـ V. وأن:

$$\deg f = \dim V$$

البرهان:

سـنعتبر متعـدد الحـدود f فـي هـذا البرهـان ذو معـامل دليلـي = 1 (monic) لإثبــات أن العنـاصر $v , \alpha(v) , \alpha^2(v) ,\ldots\ldots, \alpha^{m-1}(v)$ تكـون أســاس لــ V. نثبـت أولاً أن هـذه المجموعة مستقلة خطياً. وثانياً نثبت أنها تنشئ (تولد) V.

أولاً: أنظر مبرهنة (1.5.4) في الفصل الأول.

حيث:

$$f = a_0 + a_1 x + \ .... \ + a_{m-1} x^{m-1} + x^m$$

البرهان:

نكتب $v_i = \alpha^i (v)$ لكل $i = 0 , 1 , 2 ,.....,m-1$.

وبالتالي يكون لدينا:

$$\alpha (v_0) = 0.v_0 + 1.v_1 + 0v_2 + \ . \ . \ . \ . \ + 0.v_{m-1} = v_1$$
$$\alpha^2 (v_0) = \alpha \ (v_1) = 0.v_0 + 0.v_1 + 1.v_2 + \ . \ . \ . \ . \ + 0.v_{m-1} = v_2$$
$$\alpha^3 (v_0) = \alpha \ (v_2) = 0.v_0 + 0.v_1 + 0.v_2 + 1.v_3 + \ . \ . \ . \ . \ + 0.v_{m-1} = v_3$$

$$\alpha^{m-1} (v_0) = \alpha \ (v_{m-2}) = 0.v_0 + 0.v_1 + 0.v_2 + \ . \ . \ . \ . \ + 0. \ v_{m-2} + 1 \ v_{m-1} = v_{m-1}$$

بما أن: $f(\alpha) v = 0$ إذاً:

$$\alpha (v_{m-1}) = \alpha^m (v) = -a_0 v - a_1 \alpha (v) - \ . \ . \ . \ . \ - a_{m-1} \alpha^{m-1} (v) = v_m$$

وهذا يعني أن:

$$\alpha (v_{m-1}) = -a_0 v_0 - a_1 v_1 - \ . \ . \ . \ . \ - a_{m-1} v_{m-1} = v_m$$

أي أن مصفوفة الراسم الخطي α تكون $C(f)$ أعلاه.

تعريف (3.2.5):

المصفوفة $C(f)$ الموصوفة في النتيجة السابقة والتي نجدها وحيدة بواسطة f تسمى مصفوفة مرافقة لـ f حيث:

$$a_m = 1 \qquad \text{و} \qquad m = \deg f \geq 1$$

مبرهنة (3.2.6):

أي مصفوفة A من الرتبة n على الحقل K تشابه مصفوفة وحيدة من الرتبة n على الشكل:

$$C\left(d_1\right) \oplus C\left(d_2\right) \oplus \ldots . \oplus C\left(d_s\right)$$

حيث: $C\left(d_i\right)$ مصفوفة مرافقة إلى d_i وأن $d_1 \mid d_2 \mid \ldots \mid d_s$ حيث d_i متعدد حدود غير ثابت ومعامله الدليلي يساوي 1.

المصفوفة الموصوفة أعلاه تسمى الصيغة القياسية القانونية (R. C. F.) لـ A ، وعلى القطر تقع المصفوفات الجزئية $C\left(d_i\right)$ التي تأخذ الشكل الموصوف في النتيجة السابقة.

لاحظ أن هذه المبرهنة صحيحة دائماً للمصفوفات المعرفة على الأعداد القياسية أو الحقيقية التي هي حقول (أو أي حقل آخر).

مبرهنة (3.2.7):

أي مصفوفة من الرتبة n على F تشابه مصفوفة من الرتبة n على الشكل:

$$C\left(g_1\right) \oplus C\left(g_2\right) \oplus \ldots . \oplus C\left(g_r\right)$$

حيث:

$$s_i > 0 \quad \text{و} \quad g_i = q_i^{s_i}$$

وأن q_i متعدد حدود أولي ذو معامل دليلي يساوي 1 (monic).

المصفوفة أعلاه تعين بشكل وحيد، إذا أهملنا ترتيب المصفوفات $C\left(g_i\right)$.

فيما يلي ندرج بعض النتائج الهامة التي يمكن الإستفادة منها في هذا البحث أو في مجالات أخرى ضمن الدراسات والبحوث في الجبر الخطي.

1. أي مصفوفتين من الرتبة s على R حيث R ساحة أساسية (P I D) تكونان متكافئتين على R إذا فقط إذا كان لهما نفس المتتالية من العوامل غير المتغيرة على R ، أي أن حساب متتالية العوامل غير المتغيرة لمصفوفتين يبين كونهما متكافئتين أم لا.

2. إذا كانت α راسم خطي على V وأن:

$$C\left(d_1\right) \oplus C\left(d_2\right) \oplus \ldots . \oplus C\left(d_s\right)$$

مصفوفة قياسية قانونية لـ α فإن:

$$i)\ \ \min \alpha = d_s$$

$$ii)\ \ ch.\ \alpha = d_1 \,.\, d_2 \,.....\, d_s$$

هذا يعني إذا كان v مولد إلى $C\left(d_s\right)$ فإن:

$$\alpha^h(v) \neq 0 \qquad \text{و} \qquad h < \deg\left(d_s\right)$$

هذه النتيجة يمكن استخدامها مثلاً في التأكد من صحة العمليات المستخدمة في التحويل إلى مصفوفة قياسية قانونية.

3. في أي راسم خطي α، متعددة الحدود الأصغر لـ α ومتعددة الحدود المميزة لـ α لهما نفس المجموعة من العوامل الغير قابلة للإختزال.

تعريف (3.2.8):

المصفوفة A_x هي:

$$\begin{bmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22}-x & & a_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & & a_{tt}-x \end{bmatrix} = A - x\,I_t$$

أو يمكن أن تكون $A_x = x\,I - A$.

نتيجة (3.2.9):

العناصر غير المتغيرة الملوية (torsion invariant) لـ V هي العوامل غير الثابتة وغير المتغيرة للمصفوفة $\left(A - x\,I_t\right)$.

لمزيد من المعلومات أنظر [6].

الخلاصة:

فيما يلي نوجز ماسبق من معلومات لتحويل أي مصفوفة مربعة A إلى الصيغة القياسية القانونية:

نفرض أن $V=\{u_1,u_2,.....,u_s\}$ أساس لفضاء المتجهات V و F موديول حر على $K[x]$ أساسه $f=\{f_1, f_2,......, f_s\}$ ، إذاً يوجد ε تشاكل شامل ووحيد:

$$\varepsilon : F \to V$$

بحيث: $\varepsilon(f_i)=u_i$ لكل $1\le i\le s$.

نفرض أن $N=\ker\varepsilon$ و n أساس الموديول الجزئي N على $K[x]$ و A_x مصفوفة الإنتقال من الأساس f إلى الأساس n حيث:

$$A_x = A - xI \qquad \text{(تعريف 3.2.8)}$$

لتكن s رتبة N هذا يعني أن A_x مصفوفة من الرتبة s عناصرها في $K[x]$. إذاً بواسطة العمليات الأولية على الصفوف والأعمدة نختزل A_x إلى مصفوفة عوامل غير متغيرة (invariant factors):

$$D=\operatorname{diag}(d_1 , d_2 ,....., d_s)$$

حيث: $d_i\in K[x]$.

و

$$d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_s$$

كذلك يمكن إيجاد مصفوفتين قابلتين للعكس X و Y من الرتبة s على $K[x]$ بحيث:

$$X^{-1}A_x Y = D \qquad \text{(مبرهنة 3.1.6)}$$

الآن نفرض أن $f^*=\{f_1^*, f_2^*,....., f_s^*\}$ أساس آخر للموديل الحر F التي مصفوفة الإنتقال من الأساس f إلى f^* هي X فإن:

$$\{d_1 f_1^*, d_2 f_2^*,....., d_s f_s^*\}$$

أساس للموديل الجزئي N (مبرهنة 3.1.4).

لذلك فإن F/N عبارة عن جمع مباشر من الموديولات الجزئية الدائرية المتولدة بواسطة:

$$f_1^* + N\,,\ f_2^* + N\,,\ldots\ldots,\ f_s^* + N$$

التي تكون من الرتب $d_1\,,\ d_2\,,\ldots\ldots,\ d_s$ على التوالي.

وحسب مبرهنة التشاكل التقابلي فإن: $V \simeq F/N$.

ومنه ينتج أن V عبارة عن جمع مباشر من الموديولات الجزئية الدائرية المتولدة بواسطة:

$$\varepsilon\left(f_1^*\right),\ \varepsilon\left(f_2^*\right),\ \ldots,\ \varepsilon\left(f_s^*\right)$$

التي لها الرتب $d_1\,,\ d_2\,,\ldots\ldots,\ d_s$ على التوالي.

المصفوفتان X و Y توجدان من إجراء ذات العمليات الأولية التي أنجزت على A_x على المصفوفة المحايدة I. فعمليات الصفوف تحدد X^{-1} ، وعمليات الأعمدة تحدد Y.

3.3 خوارزمية التحويل للصيغة القياسية القانونية:

فيما يلي نعيد صياغة المعلومات السابقة بصيغة خوارزمية مكتفية ذاتياً ويمكن استخدامها من قبل الباحثين في المجالات المختلفة بدون الحاجة إلى مراجعة المعلومات السابقة.

خوارزمية تحويل A إلىالصيغة القياسية القانونية:

معطى A مصفوفة من الرتبة n على R:

1. نضع A على صورة $A_x = A - xI$ ثم نجري العمليات الأولية على صفوف وأعمدة A_x لتحويلها إلى مصفوفة قطرية.

$D = \mathrm{diag}\left(d_1\,,\ d_2\,,\ldots\ldots,\ d_n\right)$ بحيث $d_i \mid d_{i+1}$ لكل $i = 1\,,\ 2\,,\ldots.,\ n-1$.

وأقرب مايكون إلى المصفوفة المحايدة (أي متعددات الحدود الثانية في D تكون 1 فقط).

2. احسب X باستخدام ذات العمليات التي أجريت على صفوف A_x ولكن بترتيب معاكس على المصفوفة المحايدة I_n.

3. إذا كان $d_i \neq 1$ قم بما يلي:

أ- ضع A بدلاً عن x في العمود X_i (X_i العمود i من المصفوفة X) و $a\,I$ بدلا عن a حيث a عنصر في R.

ب- احسب:

$$v_i = X_i^t \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ e_n \end{pmatrix}$$

حيث: $\{e_1 , e_2 ,\ldots\ldots, e_n\}$ الأساس القياسي.

فإن v_i سيكون مولد الموديول الجزئي ذو رتبة d_i.

4. احسب أساس الموديول الجزئي نسبة إلى d_i وهو:

$$v_i , A\,v_i , A^2\, v_i ,\ldots, A^h\, v_i$$

حيث: $h = \deg(d_i) - 1$.

5. كرر العمليات في (3) و (4) لكل $d_i \neq 1$.

6. كون المصفوفة T بحيث تكون أعمدتها أساسات الموديولات الجزئية في (4)، أي:

$$T = \left[v_i , A\,v_i ,\ldots\ldots, A^{h_i}\, v_i , v_{i+1} ,\ldots\ldots, A^{h_{i+1}}\, v_{i+1} ,\ldots\ldots, A^{k-1}\, v_{k-1}\right]$$

7. احسب T^{-1}.

8. احسب $T^{-1}\,A\,T$ فنحصل على مصفوفة قياسية قانونية.

نورد بعض الأمثلة على تحويل المصفوفة إلى الصيغة القياسية القانونية.

مثال 1:

إذا كان V فضاء متجهات بُعده رباعي على الموديول Q و α راسم خطي ممثل بالمصفوفة A نسبة إلى الأساس القياسي، حيث:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-2&1&-1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

عين الصيغة القياسية القانونية لـ A.

الحل:

نطبق خطوات الخوارزمية:

.1
$$A_x=A-xI=\begin{bmatrix}-x&1&0&0\\-2&1-x&-1&1\\0&0&1-x&0\\0&0&0&1-x\end{bmatrix}$$

نختزل A_x إلى مصفوفة قطرية بواسطة إجراء العمليات الأولية على الصفوف والأعمدة وهذه العمليات على التوالي هي:

$C_1\leftrightarrow C_2$, $R_2'=R_2-(1-x)\,R_1$, $C'_2=C_2+x\,C_1$,
$C'_2=C_2-(x^2-x+2)\,C_3$, $C_2\leftrightarrow C_4$, $R_3\leftrightarrow R_4$, $R'_3=R_3-(1-x)\,R_2$,
$C'_3=C_3+C_2$, $R'_4=R_4-R_3$, $-1\,x\,R_4$

فنحصل على:

$$D=\operatorname{diag}\left[1\,,\,1\,,\,(1-x)\,,\,(1-x)\left(x^2-x+2\right)\right]\equiv(d_1\,,\,d_2\,,\,d_3\,,\,d_4)$$

حيث: $d_i\,\big|\,d_{i+1}$ لكل $1\le i\le 3$.

2. نحسب مصفوفة التحويل X بإجراء عمليات الصفوف السابقة في (1) بترتيب معاكس على I_4، وهذه العمليات هي:

$-1\,x\,R_4$ ، $R'_4 = R_4 + R_3$ ، $R'_3 = R_3 + (1-x)\,R_2$ ، $R_3 \leftrightarrow R_4$ ، $R'_2 = R_2 + (1-x)\,R_1$

نحصل على:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-x & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. بما أن $d_3 \neq 1$ لأنه $d_3 = 1-x$ إذاً:

أ- نضع A بدلاً عن x في العمود X_3 و I بدلاً عن 1 نحصل على:

$$X_3^t = (0\ ,\ 0\ ,\ I\ ,\ I)$$

ب- نحسب V_3:

$$V_3 = (0\ ,\ 0\ ,\ I\ ,\ I) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = e_3 + e_4$$

إذن V_3 مولد الموديول الجزئي الأول رتبته $(1-x)$.

كذلك:

$d_4 \neq 1$ لأنه: $d_4 = (1-x)\left(x^2 - x + 2\right)$ إذاً:

أ- نضع A بدلاً عن x في العمود X_4 و I بدلاً عن 1 فنحصل على:

$$X_4^t = (0\ ,\ 0\ ,\ -I\ ,\ 0)$$

ب- نحسب V_4:

$$V_4 = (0\ ,\ 0\ ,\ -I\ ,\ 0) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = -e_3$$

إذن V_4 مولد الموديول الجزئي الثاني ورتبته $(x-1)\left(x^2-x+2\right)(1-x)$.

4. بما أن رتبة الموديول الجزئي الأول $(x-1)$.

إذن $V_3 = e_3 + e_4$ أساس الموديول الجزئي الأول.

ورتبة الموديول الجزئي الثاني $\left(x^2-x+2\right)(1-x)$

إذن أساس الموديول الجزئي الثاني هو V_4 و $A\,V_4$ و $A^2\,V_4$ حيث أن:

$$V_4 = -e_3$$
$$A\,V_4 = A\left(-e_3\right) = -A\left(e_3\right) = e_2 - e_3$$
$$A^2\,V_4 = A\left(e_2 - e_3\right) = e_1 + 2\,e_2 - e_3$$

5. نكون T من الأساسات أعلاه:

$$\left[e_3 + e_4\ ,\ \ -e_3\ ,\ e_2 - e_3\ ,\ e_1 + 2e_2 - e_3\right]$$

أي أن:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. نحسب T^{-1}:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. نحسب .

$$T^{-1}\,A\,T = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

وهي مصفوفة قياسية قانونية.

مثال 2:

إذا كان V فضاء متجهات رباعي البعد على Q و α راسم خطي ممثل بالمصفوفة A نسبة إلى الأساس القياسي حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

عين الصيغة القياسية القانونية لـ A.

الحل:

.1
$$A_x = x\,I - A = \begin{bmatrix} x-2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & -1 \\ 1 & 1 & 1 & x-2 \end{bmatrix}$$

نختزل A_x إلى مصفوفة عوامل غير المتغيرة D بإجراء العمليات الأولية الآتية على الصفوف والأعمدة.

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \;,\; R'_2 = R_2 - (x-2)\,R_1 \;,\; C'_2 = C_2 - (x-1)\,C_1 \;,\; R'_4 = R_4 + R_1 \;,$$
$$R_2 \leftrightarrow R_3 \;,\; R'_3 = R_3 + (x-1)(x-2)\,R_2 \;,\; R'_4 = R_4 - (x-2)\,R_2 \;,\; C'_3 = C_3 - xC_2 \;,$$
$$C'_4 = C_4 - C_2 \;,\; C_3 \leftrightarrow C_4 \;,\; C'_4 = C_4 - x\,C_3 \;,\; -1 \times C_4 \;,\; R'_3 = R_3 + R_4 \;,$$
$$C'_4 = C_4 + C_3 \;,\; C_4 \leftrightarrow C_3 \;,\; C'_4 = C_4 - (x-2)\,C_3 \;,\; R'_4 = R_4 - (x-1)\,R_3 \;,$$
$$-1 \times R_4$$

فنحصل على:

$$D = \operatorname{diag}\left[\, 1 \;,\; 1 \;,\; (x-1) \;,\; (x-1)^2\,(x-2) \,\right]$$

2. نحسب X باستخدام ذات العمليات التي أجريت على صفوف A_x، على I_4 ولكن بترتيب معاكس وهذه العمليات هي:

$$R'_4 = R_4 + (x-1)\,R_3 \;,\; R'_3 = R_3 - R_4 \;,\; R'_4 = R_4 + (x-2)R_2 \;,$$
$$R'_3 = R_3 - (x-1)\,(x-2)\,R_2 \;,\; R_2 \leftrightarrow R_3 \;,\; R'_4 = R_4 - R_1 \;,$$
$$R'_2 = R_2 + (x-2)\,R_1 \;,\; R_1 \leftrightarrow R_2$$

فنحصل على:

$$X = \begin{bmatrix} x-2 & -(x-1)(x-2) & -(x-2) & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & x-2 & (x-1) & 1 \end{bmatrix}$$

3. بما أن $d_3 = x - 1$ نجري مايأتي:

أ- نضع A بدلاً عن x في العمود X_3 ، و I بدلاً عن 1.

$$X_3 = (-A + 2I \ , \ 0 \ , \ 0 \ , \ A - I)^T$$

ب- نحسب V_3:

$$V_3 = (-A + 2I\ , \ 0 \ , \ 0 \ , \ A - I) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = (-A + 2I)\, e_1 + (A - I)\, e_4 = e_2 - e_3$$

إذن $V_3 = e_2 - e_3$ يولد الموديول الجزئي الأول رتبته $(x-1)$.

كذلك:

إذاً: $d_4 = (x-1)^2\ (x-2)$

أ- نضع A بدلاً عن x في X_4 و I بدلاً عن 1.

$$X_4 = (-I \ , \ 0 \ , \ 0 \ , \ I)^T$$

ب- نحسب V_4:

$$V_4 = (-I \ , \ 0 \ , \ 0 \ , \ I) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = -e_1 + e_4$$

إذاً $V_4 = -e_1 + e_4$ يولد الموديول الجزئي الثاني رتبته $(2-x)$ $(x-2)$ $(x-1)^2$.

4. إذاً V_3 أساس الموديول الجزئي الأول.

و V_4 و $A\,V_4$ و $A^2\,V_4$ أساس الموديول الجزئي الثاني. إذاً:

$$\begin{aligned}
&V_4 = -e_1 + e_4 \\
&A\,V_4 = A\left(-e_1 + e_4\right) = -2\,e_1 + e_2 - e_3 + e_4 \\
&A^2\,V_4 = A\left(-2\,e_1 + e_2 - e_3 + e_4\right) = -4\,e_1 + 3\,e_2 - 2\,e_3
\end{aligned}$$

إذاً:

$$\left\{\, e_2 - e_3 \;,\;\; -e_1 + e_4 \;,\;\; -2\,e_1 + e_2 - e_3 + e_4 \;,\;\; -4\,e_1 + 3\,e_2 - 2\,e_3 \,\right\}$$

أساس الموديول Q.

6. نكون T من الأساسات أعلاه:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7. نحسب T^{-1}:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 2 \\ -1 & -4 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

8. إذاً:

$$T^{-1}\,A\,T = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

وهي مصفوفة قياسية قانونية.

Determining Transition Matrix for Canonical Forms

Author: Alias M. Al-Mohaishi.

supervisor: Mustafa A. Salman.

University: Al-Tahady (1996).

ABSTRACT

Determining Canonical Forms of a given matrix has taken a great deal of interest of many mathematician which resulted a classification of matrices that are similar to diagonal, Jordan or Rational Canonical forms, but an explicit method to determine transition matrix P such that $P^{-1} A P$ is in canonical form is not yet introduced, except an algorithm given by Antone to determine transition matrix for diagonable matrix.

This study is a review of some literature to deduce an explicit method for construction of transition matrix to Jordan and Rational canonical forms. The output is two Algorithms to determine transition matrix, one for Jordan canonical form and the other for Rational canonical form. A flow chart is also given for the capability of a given matrix to be similar to a particular matrix in canonical forms.

المراجع

أولاً: العربية

1. الجبر الخطي وتطبيقاته، تأليف جالبرت سترانج (.Strang G)، ترجمة د. رمضان محمد جهيمة، د. فاروق البرقي. (1994). مصراته. الدار الجماهيرية للنشر والتوزيع والإعلان.

2. الجبر الخطي، تأليف يحيى عبد سعيد، د. نزار حمدون شكر. الطبعة الأولى (1988). جامعة الموصل.

ثانياً: الأجنبية

3. Antone, H. Elementary linear algebra. John Wiley. second edition., (1981) New York.
4. Burton, M. D., Abstract and Linear algebra. Addison-Wesley (1972). Canada.
5. Hersttein I. N., Topics in algebra, second edition, John wiley and sons, (1964).
6. Hartley, B. & Hawkes, O. T., Rings, modules and linear algebra. John-Wiley and sons, (1970), New York.
7. Heading, J., Generalized zilch and Jordan canonical form. Linear algebra and its Applications 6 (19-36), (1973), Amer. Else. Pub. Comp. 1973.
8. Hohn, F., Elementary matrix Algebra. third edition. Macmillan Comp. (1973), London.
9. O'Nan, M., Linear algebra. second edition. Harcout brace Jovanovich (1976) New York.
10. Jones, W. B., Linear algebra. Holden. day. Inc. San Francisco. ( ).
11. Uhlih, F., Simultaneous Block diagonalization of two Real symmetric matrices. Linear algebra and its Application. 7 (281-289). No. 4 (1973) Amer. Else. Pub. Comp.

معجم المصطلحات العلمية

(أ)

Base	أساس
Standard basis	أساس قياسي
Principal	أساسي
Relatively prim	أولية معاً

(ب)

Dimension	بُعد
Finite dimension	بُعد منته

(ت)

Linear Transformation	تحويل خطي
Linear combination	تركيب خطي
Similar	تشابه
Applications	تطبيقات
Algebraic multiplicity	تكرار جبري
Change of basis	تغيير الأساس
Homomorphism	تشاكل
Isomorphism	تشاكل تقابلي

(ج)

Direct sum	جمع مباشر
Characteristic root	جذر مميز

(ح)

Field	حقل
Free	حر
Ring	حلقة

(خ)

Nilpotent	خامد

(د)

Cyclic	دائري (دوراني)
Cyclic subspace	فضاء جزئي دوراني

(ر)

mapping	راسم
Linear mapping	راسم خطي
Null mapping	راسم صفري
Nilpotent mapping	راسم خامد

(س)

Integral domain	ساحة

(ش)

onto	شاملة (فوقية)

(ص)

Row	صف
Form	صيغة (صورة)

(ع)

Column	عمود
Torsion element	عنصر ملوي
General	عام

(غ)

Invariant	غير متغير
Irreducible	غير قابل للإختزال

(ف)

Vector space	فضاء المتجهات
Images space	فضاء الصور
Subspace	فضاء جزئي

(ق)

Diagonal	قطر
Diagonalizable , Diagonable	قابلة للقطر
Invertible	قابلة للعكس

(م)

Associated	مرتبط
Vector	متجه
Characteristic	مميز
Characteristic polynomial	متعدد حدود مميز
Matrix	مصفوفة
Coefficient matrix	مصفوفة معاملات
Determinant	محدد
Diagonal matrix	مصفوفة قطرية
Finite	منته
Freely generators	مولد بشكل منته
Inverse	معكوس
Identity matrix	مصفوفة محايدة
Linearly independent	مستقل خطياً
Linearly dependent	معتمد خطياً
Minimum polynomial	متعدد الحدود الأصغر
Matrix of trans formation	مصفوفة التحويل الخطي
Nullvector	متجه صفري

Nilpotent matrix	مصفوفة خامدة
Partitioned matrix	مصفوفة مجزئة
Range	مدى
Symmetric	متماثل (متناظر)
Submodule	موديول جزئي
Transition matrix	مصفوفة إنتقال
Eigen value	قيمة ذاتية
Eigen vector	متجه ذاتي
Characteristic numbers	أعداد مميزة
Characteristic vectors	متجهات مميزة

(ن)

Domain	نطاق
Kernel	نواة

(ي)

Span	يولّد (ينشئ)